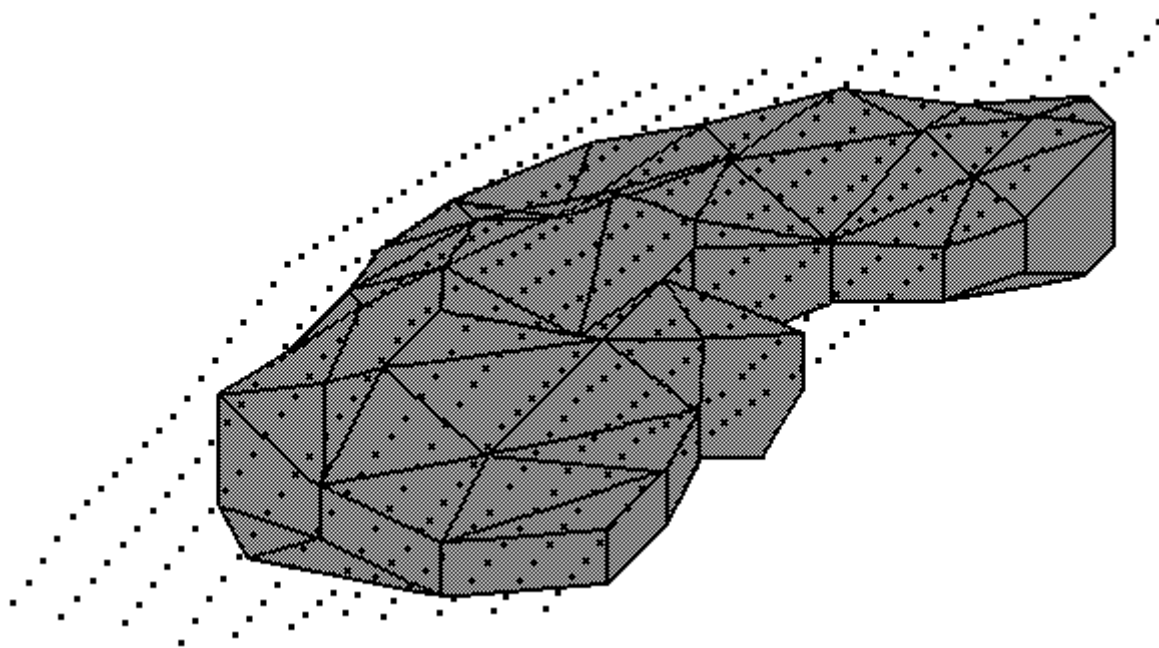


МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ ГЕОЛОГОРАЗВЕДОЧНАЯ
АКАДЕМИЯ

Ю.И. Блох

КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ
ГРАВИТАЦИОННЫХ И МАГНИТНЫХ АНОМАЛИЙ



Москва
1998

УДК 550.831+550.838

Количественная интерпретация гравитационных и магнитных аномалий.
Учебное пособие / Ю.И.Блох. - М: МГГА. 1998. 88 с.

В учебном пособии по курсу “Интерпретация гравитационных и магнитных аномалий” изложены основные группы современных методов количественной интерпретации потенциальных полей: методы моментов, особых точек, подбора и регуляризации. Они предназначены для определения геометрических параметров и физических свойств геологических объектов по их гравитационным и магнитным полям.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по специальности 08.02 “Геофизические методы поисков и разведки месторождений полезных ископаемых”.

Ил. 21. Библиогр. 21 назв.

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие написано в соответствии с программой курса “Интерпретация гравитационных и магнитных аномалий”, изучаемого студентами после освоения курсов “Гравиразведка” и “Магниторазведка”. Некоторые главы пособия могут быть также полезны студентам при изучении курса “Методы решения некорректных задач”. Оно предназначено студентам-геофизикам дневного, вечернего и заочного отделений академии.

В пособии рассмотрены основные группы современных методов количественной интерпретации потенциальных полей: методы моментов, особых точек, подбора и регуляризации. Гармонические моменты объектов и особые точки функций, описывающих аномальные поля, являются системами параметров, определяемых единственным образом без привлечения априорной информации. В связи с этим способы интерпретации, базирующиеся на их нахождении, широко применяются на практике, особенно в условиях дефицита априорной информации. Задачи количественной интерпретации геофизических полей относятся к некорректным задачам математической физики, поэтому для их решения необходимо применение специальных устойчивых способов, базирующихся на методах квазирешений и регуляризации. В пособии изложены как теоретические основы этих методов, так и конкретные способы определения параметров интерпретационных моделей в различных физико-геологических условиях, приведены примеры их практического применения.

Список литературы к пособию преимущественно содержит основные монографии последних лет, включающие разделы, посвященные детальному количественному описанию гравитационных и магнитных аномалий. Изучив пособие, читатель сможет с их помощью более глубоко разобраться в моделировании разнообразных геологических объектов.

ГЛАВА 1. МЕТОДЫ МОМЕНТОВ

§ 1. ГАРМОНИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Обратные задачи, вообще говоря, не имеют единственного решения. Одно и то же аномальное поле могут вызывать совершенно различные геологические объекты. Это значительно затрудняет истолкование полей и требует наличия обширной априорной информации. Вместе с тем, существуют две системы параметров, определяемые по полю единственным образом и без априорной информации: это гармонические моменты объектов и особые точки функций, описывающих аномальные поля. Существование данных систем, разумеется, никак не противоречит установленным фактам отсутствия единственности решения обратных задач. По этим параметрам в общем случае невозможно построить единственное решение, но можно значительно сократить область неопределенности, как бы создать каркас искомого решения. В первой главе мы рассмотрим возможности методов интерпретации, базирующихся на определении гармонических моментов.

Гармоническим моментом гравитирующего объекта V называется интеграл вида

$$m_{n,k} = \int_V \sigma(\xi, \eta, \zeta) H_{n,k}(\xi, \eta, \zeta) dV, \quad k = 1, 2, \dots, 2n + 1, \quad (1.1)$$

где σ - плотность, а $H_{n,k}(\xi, \eta, \zeta)$ - гармонический, то есть удовлетворяющий уравнению Лапласа, полином n -ой степени. Аналогичное выражение можно записать и для намагниченных объектов. Гармонические моменты взаимно однозначно связаны с коэффициентами разложения поля в ряд по сферическим функциям. В двумерном случае они связаны с коэффициентами разложения поля в ряд Лорана.

Как известно, двумерные поля наиболее удобно анализировать, переходя к комплексным характеристикам. Примем систему координат с осью Ox , направленной вправо, и с осью Oz , направленной вверх, и введем комплексную координату $u = x + iz$. Тогда комплексная напряженность аномального гравитационного поля может быть представлена следующей аналитической, то есть удовлетворяющей уравнениям Коши-Римана, функцией, составленной из вертикальной и горизонтальной компонент поля:

$$G(u) = g_z(x, z) + ig_x(x, z). \quad (1.2)$$

Во введенной системе координат положительной считается вертикальная компонента g_z , направленная по направлению оси Oz , то есть вверх, в то время как на практике обычно считается положительной вертикальная компонента Δg , направленная

вниз, поэтому $\Delta g = -g_z$. Далее лишь по отношению к наблюдаемой гравитационной аномалии мы будем использовать обозначение Δg . Комплексная напряженность гравитационного поля произвольного двумерного объекта S представима в виде следующего интеграла:

$$G(u) = 2if \int_S \frac{\sigma(w)dS}{w - u}. \quad (1.3)$$

Здесь $f = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$ - гравитационная постоянная, а $w = \xi + i\zeta$ - комплексная координата текущей точки объекта.

Для намагниченных объектов вводятся комплексная намагниченность $I = I_x + iI_z$ и комплексная индукция магнитного поля, составленная из ее вертикальной и горизонтальной компонент:

$$T(u) = Z(x, z) + iX(x, z). \quad (1.4)$$

Эта функция также является аналитической и для произвольного двумерного объекта представляется в виде интеграла:

$$T(u) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \int_S \frac{I(w)dS}{(w - u)^2}, \quad (1.5)$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн} / \text{м}$ - магнитная постоянная в системе единиц СИ. Так же, как и для гравитационной аномалии, соотношение между введенной вертикальной компонентой Z и наблюдаемой вертикальной компонентой ΔZ следующее: $\Delta Z = -Z$. Далее обозначение ΔZ будет использоваться только по отношению к наблюдаемой вертикальной составляющей индукции магнитного поля.

Разложим знаменатель в интеграле (1.3) в ряд, для чего воспользуемся известной формулой для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}. \quad (1.6)$$

Этот ряд абсолютно и равномерно сходится при условии $|q| < 1$. С учетом (1.6) получим:

$$\frac{1}{w - u} = - \frac{1}{u \left(1 - \frac{w}{u}\right)} = - \frac{1}{u} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{w}{u}\right)^n = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{u^{n+1}}. \quad (1.7)$$

Данный ряд сходится при $|w| < |u|$. Подставив при этом условии (1.7) в (1.3), проинтегрировав ряд почленно и вынеся u за знак интеграла, получим следующее соотношение:

$$G(u) = -2if \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n(0)}{u^{n+1}}, \quad (1.8)$$

где

$$m_n(0) = \int_S \sigma(w) w^n dS - \quad (1.9)$$

- комплексный гармонический момент гравитирующих масс n -го порядка относительно начала координат. Условие сходимости этого ряда $|w| < |u|$ имеет следующий смысл: геометрическое место точек сходимости ряда - внешность окружности с центром в начале координат, охватывающей весь объект S , то есть ряд (1.8) является рядом Лорана.

Разложение в ряд Лорана комплексной индукции магнитного поля можно провести аналогично, но проще применить следующий прием. Поскольку при условии $|w| < |u|$ ряд (1.7) абсолютно и равномерно сходится, его можно почленно продифференцировать, в результате чего получим:

$$\frac{1}{(w-u)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)w^n}{u^{n+2}}. \quad (1.10)$$

Подставив (1.10) в (1.5), проинтегрировав ряд почленно и вынеся u за знак интеграла, получим следующее соотношение:

$$T(u) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)M_n(0)}{u^{n+2}}, \quad (1.11)$$

где

$$M_n(0) = \int_S I(w) w^n dS - \quad (1.12)$$

- комплексный гармонический момент намагниченных масс n -го порядка относительно начала координат. Область сходимости ряда (1.11), очевидно, совпадает с областью сходимости ряда (1.8) - она часто называется окрестностью бесконечно удаленной точки.

В полученных рядах центр разложения совпадает с началом координат. В общем случае, когда центр разложения помещен в точку u_0 , ряды Лорана и формулы, описывающие гармонические моменты, преобразуются путем переноса начала координат. В результате для гравитационного поля получим

$$G(u) = -2if \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n(u_0)}{(u-u_0)^{n+1}}, \quad (1.13)$$

где

$$m_n(u_0) = \int_S \sigma(w)(w - u_0)^n dS - \quad (1.14)$$

- комплексный гармонический момент гравитирующих масс n -го порядка относительно точки u_0 . Для магнитного поля

$$T(u) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)M_n(u_0)}{(u - u_0)^{n+2}}, \quad (1.15)$$

где

$$M_n(u_0) = \int_S I(w)(w - u_0)^n dS - \quad (1.16)$$

- комплексный гармонический момент намагниченных масс n -го порядка относительно точки u_0 . Ряды Лорана (1.13) и (1.15), очевидно, сходятся во внешности окружности с центром в точке u_0 , охватывающей все источники.

Полученные разложения аномальных полей приводят к следующим основным выводам.

1. Аномальные поля и системы комплексных гармонических моментов связаны взаимно однозначным соответствием. С одной стороны, по аномальному полю могут быть без какой-либо априорной информации **единственным образом** определены все гармонические моменты. С другой стороны, зная все комплексные гармонические моменты, можно однозначно вычислить аномальное поле во внешности окружности, где сходится ряд. Из этого следует, что если внешние поля двух различных источников совпадают, то совпадают и все их комплексные гармонические моменты и наоборот.

2. Устойчивость определения гармонических моментов по полю - различна. Наибольший вклад в аномальное поле вносят нулевые моменты, следовательно, они определяются по полю наиболее устойчиво. С ростом номера n модуль знаменателя в (1.13) и (1.15) резко возрастает, а устойчивость определения гармонических моментов по полю уменьшается.

В процессе интерпретации часто приходится переопределять гармонические моменты, найденные относительно одной точки, к другой точке. Для этого применяется формула пересчета моментов. Поскольку соотношения (1.14) и (1.16), характеризующие моменты, однотипны, формула пересчета моментов одинакова для обоих полей. Выведем ее для гравитирующих масс, то есть определим комплексный гармонический момент $m_n(u_1)$ через известные моменты относительно точки u_0 . Из (1.14) следует, что

$$m_n(u_1) = \int_S \sigma(w)(w - u_1)^n dS = \int_S \sigma(w)[(w - u_0) + (u_0 - u_1)]^n dS. \quad (1.17)$$

Преобразуем выражение в квадратных скобках по формуле бинома Ньютона:

$$m_n(u_1) = \int_S \sigma(w) \sum_{i=0}^n C_n^i (u_0 - u_1)^{n-i} (w - u_0)^i dS, \quad (1.18)$$

где

$$C_n^i = \frac{n!}{i! (n-i)!} - \quad (1.19)$$

- биномиальные коэффициенты. После почленного интегрирования и выноса за пределы интеграла сомножителей, не зависящих от w , получим

$$m_n(u_1) = \sum_{i=0}^n C_n^i (u_0 - u_1)^{n-i} \int_S \sigma(w) (w - u_0)^i dS, \quad (1.20)$$

в итоге формула пересчета моментов примет следующий вид:

$$m_n(u_1) = \sum_{i=0}^n C_n^i (u_0 - u_1)^{n-i} m_i(u_0). \quad (1.21)$$

Таким образом, для того чтобы вычислить $m_n(u_1)$, надо знать не только $m_n(u_0)$, но и все моменты меньших порядков относительно точки u_0 . Нулевые моменты, как следует из (1.14) и (1.16), одинаковы относительно любых точек, поэтому их обычно записывают просто как m_0 и M_0 , опуская указание комплексной координаты центра разложения, относительно которого они определены.

При интерпретации гравитационных и магнитных аномалий чаще используются не сами комплексные гармонические моменты, а их комбинации, называемые интегральными характеристиками объектов. Рассмотрим физический смысл наиболее устойчиво определяемых интегральных характеристик, связанных с начальными гармоническими моментами. При этом для простоты будем считать, что плотность и намагниченность объектов однородны.

Для двумерных гравитирующих объектов при $n=0$ из (1.14) следует

$$m_0 = \sigma \int_S dS = \sigma S, \quad (1.22)$$

где S - площадь поперечного сечения объекта. Это произведение характеризует избыточную массу единицы длины (линейную избыточную массу) двумерного объекта. Если избыточная плотность объекта - нулевая, то есть его плотность не отличается от плотности вмещающей среды, то нулевой момент равен нулю, так же как и гравитационная аномалия. Для двумерных намагниченных объектов соответственно из (1.16) вытекает

$$M_0 = IS. \quad (1.23)$$

Нулевой гармонический момент намагниченного объекта оказывается равным избыточному магнитному моменту единицы его длины (линейному магнитному моменту).

В трехмерном случае имеют место аналогичные соотношения:

$$m_0 = \sigma V, \quad (1.24)$$

$$M_0 = IV, \quad (1.25)$$

где V - объем объектов. Таким образом, в трехмерном случае нулевые моменты оказываются равными соответственно избыточной массе и избыточному магнитному моменту объектов. Знание этих интегральных характеристик чрезвычайно важно при оценке запасов месторождений по создаваемым ими гравитационным и магнитным аномалиям. Напомним, кстати, что нулевой момент наиболее устойчиво определяется по аномальному полю.

Рассмотрим интегральную характеристику, представляющую собой отношение первого комплексного гармонического момента к нулевому. При $n=1$ из (1.14) для двумерных однородных гравитирующих объектов следует:

$$\frac{m_1(0)}{m_0} = \frac{\int w dS}{S} = \frac{\int \xi dS}{S} + i \frac{\int \zeta dS}{S} = x_c + iz_c = u_c. \quad (1.26)$$

Действительная и мнимая части этой комплексной интегральной характеристики соответственно представляют собой по определению горизонтальную x_c и вертикальную z_c координаты центра масс объекта. Очевидно, то же соотношение справедливо и для намагниченных объектов. Таким образом, отношение первого комплексного гармонического момента к нулевому является комплексной координатой центра масс объекта u_c , однозначно определяемой по полю без привлечения априорной информации.

Для бесконечных объектов типа контактной поверхности формула (1.26) - не справедлива. В этом легко убедиться из известного примера теоретической эквивалентности аномальных полей контактной поверхности в форме конхоиды Слюза и линейной массы, проходящей через центр ее производящей окружности [17]. Формула (1.26), очевидно, характеризует именно центр производящей окружности, расположенный значительно глубже самой поверхности. Это связано с тем, что для бесконечных объектов ряды Лорана (1.13) и (1.15) непосредственно не применимы, поскольку окружность, охватывающая массы, вне которой ряды сходятся, должна иметь бесконечный радиус.

Второй комплексный гармонический момент, определенный относительно центра гравитирующих масс, приводит к интегральным характеристикам, вводимым формулами:

$$\gamma = \sqrt{\left| \frac{m_2(u_c)}{m_0} \right|}, \quad (1.27)$$

$$\theta = \frac{1}{2} \arg \frac{m_2(u_c)}{m_0}. \quad (1.28)$$

Аналогичные формулы справедливы и для намагниченных масс. Для однородных объектов (при их постоянной избыточной плотности или намагниченности) интегральная характеристика θ представляет собой угол между осью Ox и длинной осью объекта, отсчитываемый против часовой стрелки. Тем самым θ характеризует направление и угол падения объекта. Интегральная характеристика γ является мерой относительной вытянутости объекта вдоль длинной оси, причем для изометричного объекта она равна нулю. В частности, для прямоугольника со сторонами L и l ($L>l$)

$$\gamma = \sqrt{\frac{L^2 - l^2}{12}}, \quad (1.29)$$

для эллипса с полуосями a и b ($a>b$)

$$\gamma = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2}. \quad (1.30)$$

Третий комплексный гармонический момент характеризует степень отличия формы поперечного сечения двумерного объекта от тела с двумя осями симметрии, параллельными осям координат и т. д. Выше было отмечено, что устойчивость определения моментов по аномальному полю резко уменьшается с ростом их номера. Фактически даже третий момент по полю пока не определяют с достаточной точностью, поэтому на практике обычно ограничиваются нулевым и первым, реже вторым моментами.

Физический смысл первых гармонических моментов был рассмотрен нами преимущественно для однородных объектов. Если плотность либо намагниченность - не однородны, то второй, третий и последующие моменты приобретают более сложный характер, зависящий как от формы тела, так и от распределения физических свойств в нем.

Наиболее удобной формой представления результатов определения гармонических моментов является квазиэквивалент. Квазиэквивалентом n -го порядка называют тело простой формы, у которого моменты с нулевого по n -ый совпадают с соответствующими моментами изучаемого объекта. В качестве квазиэквивалента первого порядка обычно используют круг или квадрат, в качестве квазиэквивалента второго порядка - эллипс или прямоугольник. Рассмотрим, например, построение квазиэквивалентного прямоугольника по интегральным характеристикам гравитирующего объекта (рис. 1). Для намагниченных объектов эти построения практически аналогичны.

Вначале по формуле (1.26) найдем положение центра масс объекта u_c , затем, зная характеристику θ , определим направление и угол его падения. Для окончатель-

ного построения квазиэквивалента остается определить лишь его стороны L и I , однако, сделать это единственным образом без априорной информации об избыточной плотности невозможно. Действительно, для определения сторон прямоугольника мы располагаем двумя интегральными характеристиками: m_0 и γ , которые дают систему уравнений, следующую из (1.22) и (1.29):

$$\sigma lL = m_0, \quad L^2 - I^2 = 12\gamma^2. \quad (1.31)$$

Без знания избыточной плотности, очевидно, можно построить лишь бесконечное квазиэквивалентное семейство прямоугольников, вытянутых вдоль определенного направления. Тем самым мы убеждаемся, что существование системы гармонических моментов, однозначно определяемых по аномальному полю, никак не противоречит отсутствию единственности решения обратных задач. По этим параметрам в общем случае невозможно построить единственное решение, но можно значительно сократить область неопределенности и создать каркас искомого решения. Когда избыточная плотность известна, стороны прямоугольника определяются по следующим формулам, являющимися решениями системы (1.31):

$$L = \sqrt{\sqrt{36\gamma^4 + \frac{m_0^2}{\sigma^2} + 6\gamma^2}},$$

$$I = \sqrt{\sqrt{36\gamma^4 + \frac{m_0^2}{\sigma^2} - 6\gamma^2}}. \quad (1.32)$$

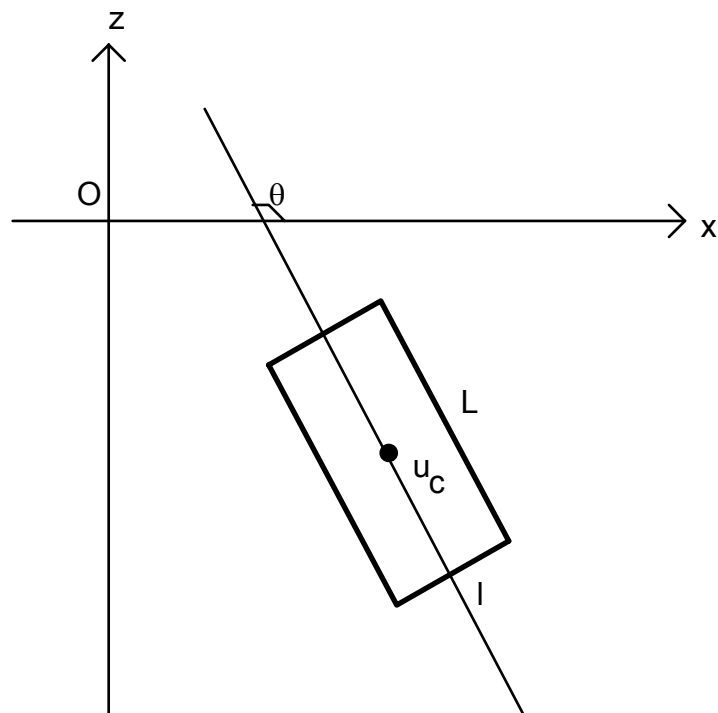


Рис. 1. Построение квазиэквивалентного прямоугольника

Если избыточная плотность мала, квазиэквивалентный прямоугольник стремится к квадрату с большой площадью, если она велика, прямоугольник вырождается в тонкую пластинку. В процессе количественной интерпретации квазиэквиваленты часто употребляются в качестве начального приближения для последующего подбора.

§ 2. СПОСОБЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ МОМЕНТОВ

Методы количественной интерпретации, базирующиеся на использовании гармонических моментов, называют методами моментов. К настоящему времени предложено довольно много способов определения гармонических моментов по полю, лежащих в основе методов моментов. Их можно разделить на следующие три группы:

- 1) интегральные способы,
- 2) спектральные способы,
- 3) аппроксимационные способы.

Интегральные способы интерпретации гравитационных и магнитных аномалий впервые были предложены Ф.А.Слудским еще в прошлом веке, но, не найдя в то время применения, оказались забытыми и переоткрыты в 30-х годах нашего века Г.А.Гамбурцевым, А.П.Казанским и А.А.Заморевым. Их суть состоит в вычислении несобственных интегралов от произведения аномального поля и его трансформант на гармонические полиномы. Известны многие десятки интегральных соотношений, например, для двумерной задачи гравиразведки получены следующие формулы:

$$m_0 = \frac{1}{2\pi f} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta g(x) dx, \quad (2.1)$$

$$\operatorname{Re} m_1(0) = x_c m_0 = \frac{1}{2\pi f} \int_{-\infty}^{\infty} x \Delta g(x) dx, \quad (2.2)$$

$$\operatorname{Im} m_1(0) = z_c m_0 = \frac{1}{2\pi f} \int_{-\infty}^{\infty} [x^2 W_{zz}(x) - x g_x(x)] dx. \quad (2.3)$$

Для двумерной задачи магниторазведки применительно к системе единиц СИ, в частности, имеют место такие соотношения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Delta Z(x) dx = 0, \quad (2.4)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Delta X(x) dx = 0, \quad (2.5)$$

$$\operatorname{Re} M_0 = I_x S = -\frac{2}{\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} x \Delta Z(x) dx, \quad (2.6)$$

$$\operatorname{Im} M_0 = I_z S = -\frac{2}{\mu_0} \int_{-\infty}^{\infty} x \Delta X(x) dx. \quad (2.7)$$

Формулы (2.4) и (2.5), хотя и не связаны с интегральными характеристиками, имеют большое практическое значение, так как при изучении замкнутых тел могут быть применены для выбора уровня нормального поля. Численное интегрирование подобных соотношений, то есть определение площади между графиками этих функций и осью абсцисс, может проводиться самыми разнообразными способами, наиболее часто для этого применяется достаточно простой способ трапеций.

Интегральные способы определения гармонических моментов устойчивы к высокочастотным помехам, но не устойчивы к низкочастотным помехам и фонам. Рассмотрим соотношение (2.1) и представим себе что уровень фона гравитационной аномалии определен с небольшой ошибкой ε , то есть вместо Δg в эту формулу подставляется $\Delta g + \varepsilon$. Тогда интеграл в (2.1) станет расходящимся. Поскольку наблюдаемое поле измерено на конечном интервале, результаты численного интегрирования, естественно, дадут конечное значение момента, но оно может быть весьма далеким от истинного. Ограниченность участка съемки и наличие сложного рельефа местности, где эта съемка проводится, также требуют учета. Преодоление отмеченных недостатков интегральных способов достигается за счет предварительного редуцирования наблюдений с неровного рельефа на горизонтальную плоскость и введения специальных поправок.

Рассмотрим один из способов введения поправки за конечность профиля наблюдений для двумерных тел, предложенный Е.Г.Булахом. Если аномалия ускорения силы тяжести - квазисимметрична, то за пределами профиля она может быть аппроксимирована полем линейной массы, расположенной под экстремумом аномалии. Поместим начало координат в эпицентр аномалии и будем считать, что профиль расположен симметрично относительно этой точки в пределах от $-a$ до $+a$. Линейная масса выбирается так, чтобы ее гравитационная аномалия совпала с наблюдаемой в двух точках: в экстремуме и на правом краю профиля в точке $+a$ (или в точке $-a$ при вычислении поправки для левого края). Поле аппроксимирующей линейной массы можно представить в следующем виде:

$$\Delta g(x) = \frac{\Delta g_{\max} h^2}{x^2 + h^2}, \quad (2.8)$$

где h - глубина ее залегания. Так как поле в точке $+a$ известно и равно $\Delta g(a)$, можно найти глубину аппроксимирующей массы и подставить ее в (2.8). В результате получим

$$\Delta g(x) = \frac{a^2 \beta \Delta g_{\max}}{x^2(1-\beta) + a^2 \beta}, \quad (2.9)$$

где

$$\beta = \frac{\Delta g(a)}{\Delta g_{\max}}. \quad (2.10)$$

Вычислим интегралы от (2.9) в бесконечных и конечных пределах:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta g(x) dx = 2 \int_0^{\infty} \Delta g(x) dx = \pi a \Delta g_{\max} \sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}}, \quad (2.11)$$

$$\int_{-a}^{+a} \Delta g(x) dx = 2 \int_0^a \Delta g(x) dx = \pi a \Delta g_{\max} \sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-\beta}{\beta}}. \quad (2.12)$$

Отсюда следует, что поправка за правый край при расчете нулевого момента интегральным способом (2.1) должна определяться по формуле

$$\int_{+a}^{+\infty} \Delta g(x) dx = a \Delta g_{\max} \sqrt{\frac{\beta}{1-\beta}} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-\beta}{\beta}} \right). \quad (2.13)$$

Аналогично находится и поправка для левого края, при этом параметр β определяется по значению поля на левом краю профиля в точке $-a$. В итоге интеграл в бесконечных пределах будет являться суммой двух поправок и интеграла в пределах профиля

$$Q(a) = \int_{-a}^{+a} \Delta g(x) dx, \quad (2.14)$$

вычисляемого любым численным методом, например, методом трапеций. При этом можно показать, что, зная m_0 и $Q(a)$, легко рассчитать глубину центра масс гравитирующего объекта по формуле

$$z_c = a \cdot \operatorname{ctg} \frac{Q(a)}{4fm_0}. \quad (2.15)$$

На практике для повышения точности расчетов целесообразно проводить эти вычисления при нескольких значениях a и усреднять полученные результаты.

Для учета постоянного регионального фона Е.Г.Булахом также предложен достаточно простой способ, применимый к квазисимметричным аномалиям. В этом способе определение нулевого момента и глубины центра масс проводится по разностям максимального значения гравитационной аномалии и значений в текущих точках. Очевидно, при вычислении разностей постоянный фон подавляется.

Закрепим начало координат в экстремуме аномалии. Тогда для произвольной точки a справедливо следующее соотношение:

$$\Delta g_{\max} - \Delta g(a) = \frac{2fa^2m_0}{z_c(z_c^2 + a^2)}. \quad (2.16)$$

Для другой точки **b** аналогично

$$\Delta g_{\max} - \Delta g(b) = \frac{2fb^2m_0}{z_c(z_c^2 + b^2)}. \quad (2.17)$$

Решая совместно (2.16) и (2.17), получим

$$z_c = \sqrt{\frac{b^2 - pa^2}{p-1}}, \quad (2.18)$$

где

$$p = \frac{b^2[\Delta g_{\max} - \Delta g(a)]}{a^2[\Delta g_{\max} - \Delta g(b)]}. \quad (2.19)$$

Нулевой момент m_0 определяется из (2.16) или (2.17) при подстановке z_c , рассчитанного по формуле (2.18). Разумеется, такие вычисления целесообразно проводить по нескольким парам точек для повышения устойчивости к помехам в аномальном поле.

Спектральные способы базируются на соотношениях между спектрами гравитационных и магнитных аномалий и их моментами относительно начала координат. Как известно, спектр функции является комплексной функцией пространственной частоты ω , измеряемой в 1/км, и вычисляется по следующей формуле, представляющей собой прямое преобразование Фурье:

$$S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U(x)e^{-i\omega x} dx. \quad (2.20)$$

Преобразуем с помощью этой формулы интегральное соотношение, описывающее гравитационную аномалию g_z от произвольного двумерного объекта на дневной поверхности, то есть при $\mathbf{z}=\mathbf{0}$. Поскольку ось \mathbf{Oz} здесь считается направленной вверх, это соотношение имеет следующий вид:

$$g_z(\mathbf{x}) = 2f \int_S \frac{\sigma(\xi, \zeta)\zeta dS}{(\xi - x)^2 + \zeta^2}. \quad (2.21)$$

Подставив (2.21) в (2.20) и поменяв порядок интегрирования, получим

$$S(\omega) = \frac{2f}{\sqrt{2\pi}} \int_S \sigma(\xi, \zeta) \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta e^{-i\omega x} dx}{(\xi - x)^2 + \zeta^2} \right] dS. \quad (2.22)$$

Так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\zeta e^{-i\omega x} dx}{(\xi - x)^2 + \zeta^2} = \pi e^{-(|\omega|\zeta + i\omega\xi)}, \quad (2.23)$$

в результате придем к следующему выражению для спектра гравитационного поля произвольного двумерного объекта:

$$S(\omega) = f\sqrt{2\pi} \int_S \sigma(\xi, \zeta) e^{-i(\omega|\zeta+i\omega\xi)} dS. \quad (2.24)$$

При $\omega=0$

$$S(0) = f\sqrt{2\pi} \int_S \sigma(\xi, \zeta) dS, \quad (2.25)$$

откуда с учетом (1.14) следует, что нулевой момент двумерного гравитирующего объекта может быть определен по формуле

$$m_0 = \frac{S(0)}{f\sqrt{2\pi}}. \quad (2.26)$$

На практике значение $S(0)$ не рассчитывается, поэтому вычислительная формула для спектра наблюдаемой функции Δg ($\Delta g = -g_z$) принимает вид:

$$m_0 = -\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{S(\omega)}{f\sqrt{2\pi}}. \quad (2.27)$$

Таким образом, для определения момента надо экстраполировать спектр до оси ординат. Общую формулу для моментов гравитирующих объектов относительно начала координат получил В.Н.Страхов:

$$m_n(0) = -\frac{i^n}{f\sqrt{2\pi}} \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{d^n S(\omega)}{d\omega^n}. \quad (2.28)$$

Аналогичные формулы получены и для моментов намагниченных объектов. Моменты относительно других точек могут быть определены с помощью формулы пересчета (1.21). Поскольку экстраполяция спектра до оси ординат и дифференцирование являются неустойчивыми процедурами, даже моменты второго порядка таким путем практически не определяются.

Наиболее эффективными для определения гармонических моментов являются аппроксимационные способы. С их помощью можно определять моменты по полю, измеренному на ограниченных профилях, по неравномерной сети, на неровном рельефе, к тому же осложненному региональным фоном. Из полученных в предыдущем параграфе разложений аномальных полей в ряды Лорана следует, что если внешние поля двух различных источников совпадают, то совпадают и все их комплексные гармонические моменты и наоборот. Этот вывод дает возможность свести задачу определения моментов к подбору наблюдаемого поля с помощью некоторой аппроксимирующей конструкции.

В зависимости от типа аппроксимирующей конструкции рассматриваемые способы подразделяются на две разновидности, в которых используется:

- 1) аппроксимация отрезками ряда Лорана;

2) аппроксимация формальными источниками.

Пусть известны значения аномалий силы тяжести $\Delta g(u_k)$ в m точках на поверхности Земли. Определим N комплексных гармонических моментов относительно заданной опорной точки $u_{оп}$ из условия минимума среднеквадратической погрешности отличия наблюдаемого поля от функции, представляющей собой отрезок ряда Лорана (1.13) с N членами. С учетом того, что $\Delta g = -g_z$, это условие может быть записано следующим образом:

$$\sum_{k=1}^m \left[\Delta g(u_k) - 2f \cdot \operatorname{Re} \sum_{n=0}^N \frac{i \cdot m_n(u_{оп})}{(u_k - u_{оп})^{n+1}} \right]^2 = \min. \quad (2.29)$$

В этом выражении все величины за исключением моментов являются известными. Задача их определения является линейной задачей подбора относительно N комплексных гармонических моментов и сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. Очевидно, ход решения задачи (2.29) не зависит от того, измерено ли поле на горизонтальном профиле или на неровном рельефе. Если наблюдаемое поле осложнено региональным фоном, его можно параметризовать, например, в виде полинома и находить коэффициенты полинома одновременно с моментами, что не нарушает линейности задачи. Алгоритмы решения таких задач будут подробно рассмотрены в главе, посвященной методам подбора. Определение моментов намагниченных объектов проводится аналогично, только вместо отрезка ряда (1.13) используется соответствующий отрезок ряда (1.15).

Вторая из разновидностей аппроксимационных способов включает два этапа. На первом этапе наблюдаемое поле подбирается полем некоторой системы формальных источников таких как линейные массы, диполи, пластинки, многоугольники и т.п. При этом не ставится задача определения геологического строения изучаемого участка, то есть никакого геологического смысла полученному набору источников не придается - они даже могут накладываться друг на друга или пересекаться. Требуется лишь достаточно точное совпадение наблюдаемого и подобранного полей. В отличие от первой разновидности задача подбора может решаться как линейная, когда формальные источники закреплены в пространстве и требуется найти только их нулевые моменты, так и нелинейная, когда сами источники в процессе подбора могут перемещаться. Региональный фон учитывается так же, как и в первой разновидности. На втором этапе по строгим формулам вычисляются суммарные моменты формальных источников, которые, как следует из разложения в ряд Лорана, равны соответствующим моментам изучаемого объекта.

На рис. 2 показан пример применения одного из аппроксимационных способов при интерпретации двумерной магнитной аномалии на титаномagnetитовом месторождении. Магнитная аномалия ΔT амплитудой свыше 70 мкТл, измеренная на не-

ровном рельефе в горном районе, была аппроксимирована полем 39 линейных диполей, расположенных равномерно на треугольном каркасе, заданном интерпретатором. Моменты каждого из диполей были найдены с помощью метода регуляризации. Суммарные моменты дали возможность построить квазиэквивалентную пластинку, определить направление и угол падения рудных тел, глубину центра масс и нижней кромки, а также направление вектора намагниченности руд.

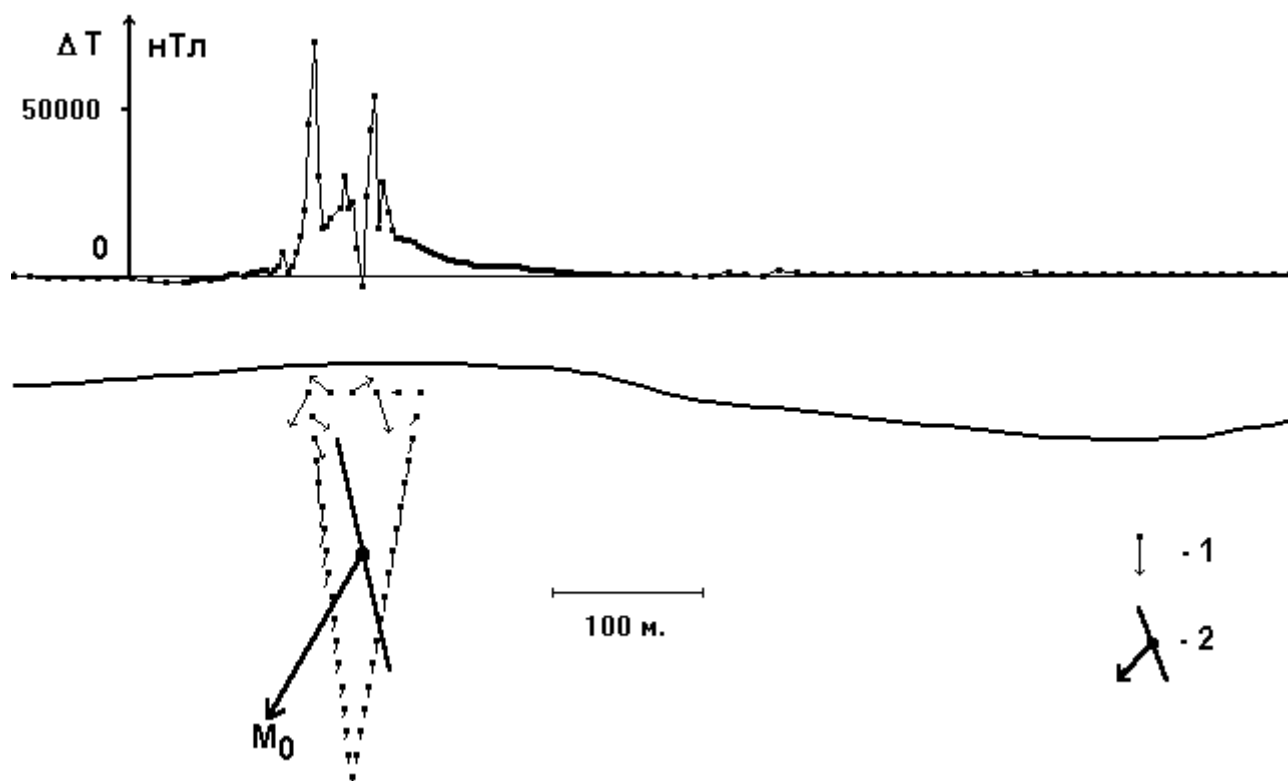


Рис. 2. Интерпретация магнитной аномалии на титаномагнетитовом месторождении аппроксимационным методом: 1) расположение аппроксимирующих линейных диполей и их моменты; 2) квазиэквивалентная пластинка и ее магнитный момент

Рисунок демонстрирует, что сама по себе аппроксимирующая конструкция не несет геологической информации - моменты диполей ориентированы по-разному и меняются от диполя к диполю более, чем на порядок. Тем не менее суммарные моменты четко отражают изучаемый объект. Зная модуль намагниченности руд, легко построить квазиэквивалентный прямоугольник, который послужит стартовой моделью для дальнейшей оптимизации.

ГЛАВА 2. МЕТОДЫ ОСОБЫХ ТОЧЕК

§ 3. ОСОБЫЕ ТОЧКИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Второй системой параметров, однозначно определяемых по аномальному полю без привлечения какой-либо априорной информации, является система особых точек функций, описывающих аномальные поля. Понятие особенности как точки, в которой функция теряет свою аналитичность, известно из курса теории функций комплексной переменной. Оказывается, особые точки функций, описывающих гравитационные и магнитные аномалии, теснейшим образом связаны с создающими их объектами и могут нести информацию об их местоположении и форме. Концепция особых точек для интерпретации гравитационных и магнитных аномалий впервые предложена В.Н.Страховым и независимо, но несколько позднее Г.Я.Голиздрой. В дальнейшем ее развитии участвовали многие отечественные и зарубежные геофизики. В отличие от рассмотренной в предыдущей главе системы гармонических моментов, между особыми точками и аномальным полем нет взаимно-однозначного соответствия. Особые точки в принципе однозначно определяются по полю, однако, поле ими полностью не определяется. Напомним вначале ряд основных понятий, необходимых для дальнейшего изложения.

Функция $f(u)$ называется регулярной в точке a , если она представляется степенным рядом:

$$f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (u - a)^n, \quad (3.1)$$

сходящимся в какой-либо окрестности этой точки. Функция $f(u)$ называется регулярной в области D , если она регулярна в каждой ее точке. Характерная особенность регулярных функций, выясняемая теоремой единственности, состоит в том, что если функцию, регулярную в некоторой области, можно продолжить с сохранением регулярности в более широкую область, то это можно сделать только одним способом. Таким путем определяется понятие аналитической функции, при этом основным аппаратом является аналитическое продолжение.

Пусть в точке u_1 некоторой малой области D задана регулярная функция $f(u)$, называемая исходным элементом. По определению, $f(u)$ может быть представлена рядом (3.1). Областью сходимости этого ряда является внутренняя область круга $|u - u_1| < R_1$, где R_1 - радиус сходимости ряда. Выберем в пределах этого круга точку u_2 и составим степенной ряд со своим радиусом сходимости R_2 . Круг $|u - u_2| < R_2$ может выходить за пределы исходного круга и т.д. Указанным путем часто можно продолжить исходный элемент за пределы области D . Если это

сделать по всем возможным направлениям во все возможные точки, получим аналитическую (иногда говорят полную аналитическую) функцию, впервые введенную К.Вейерштрассом. Может случиться так, что в результате аналитического продолжения мы вернемся в исходную точку. Если при этом полученные значения не совпадают с исходными, это свидетельствует о многозначности функции в области, через которую она была продолжена. К многозначным аналитическим функциям относится большинство функций, описывающих гравитационные и магнитные аномалии.

Пусть заданы аналитическая функция $F(u)$, порожденная исходным элементом $f_q(u)$ в точке q , и кривая L , идущая из точки q в точку a . Если исходный элемент можно аналитически продолжить вдоль кривой L в любую ее точку, кроме конца - точки a , то точка a называется особой точкой аналитической функции $F(u)$.

Значение особых точек для исследования аналитических функций и для интерпретации аномалий определяется теоремой Ж.Лиувилля, которая формулируется следующим образом. Если функция аналитична во всей плоскости и ограничена, то она является постоянной. Из теоремы следует, что любая аналитическая функция, отличная от тождественной постоянной, должна иметь особые точки. Другими словами, если потенциальное поле отлично от тождественной постоянной, то есть содержит аномалии, то функция, описывающая его, должна иметь особые точки.

Наиболее важным классом особенностей являются изолированные особые точки. В зависимости от того, как ведет себя функция в окрестности особой точки, выделяются особенности различных типов. На рис. 3 приводится классификация изолированных особых точек, наиболее часто встречающихся в практике интерпретации.

Различают изолированные особые точки однозначного и многозначного характеров (точки ветвления). Если функция $f(u)$ регулярна в некотором кольце $0 < |u - a| < r$, и точка a является ее особой точкой, то говорят, что точка a - изолированная особая точка однозначного характера для функции $f(u)$. В зависимости от поведения $f(u)$ в окрестности точки a выделяют три типа изолированных особых точек однозначного характера. Для этого надо рассмотреть предел $\lim_{u \rightarrow a} f(u)$.

1. Если данный предел существует и конечен, то a называется устранимой особой точкой. Примером может служить точка $u=0$ для функции

$$f(u) = \frac{\sin(u)}{u}. \quad (3.2)$$

2. Если данный предел - бесконечен (то есть $| f(u) | \rightarrow \infty$ при $u \rightarrow a$), то точка **a** называется полюсом. Различают полюса различных порядков. В полюсе **n**-го порядка функция **f(u)** представима в виде

$$f(u) = \frac{A(u)}{(u - a)^n} + B(u), \quad (3.3)$$

где **A(u)** и **B(u)** - функции, регулярные в точке **a**.

3. Если данный предел не существует, то точка **a** называется существенно особой точкой. Для нее справедлива следующая теорема Ю.В.Сохоцкого. Если **a** - существенно особая точка **f(u)**, то для любого комплексного числа **C** существует последовательность точек $u_k \rightarrow a$ такая, что $\lim_{k \rightarrow \infty} f(u_k) = C$. Примером может служить точка **u=0** для функции

$$f(u) = e^{1/u}. \quad (3.4)$$

Для нее при $u_k = 1/k$ предел бесконечный, при $u_k = -1/k$ - предел нулевой, а при $u_k = 1/(\ln C + 2k\pi i)$ предел равен **C**.

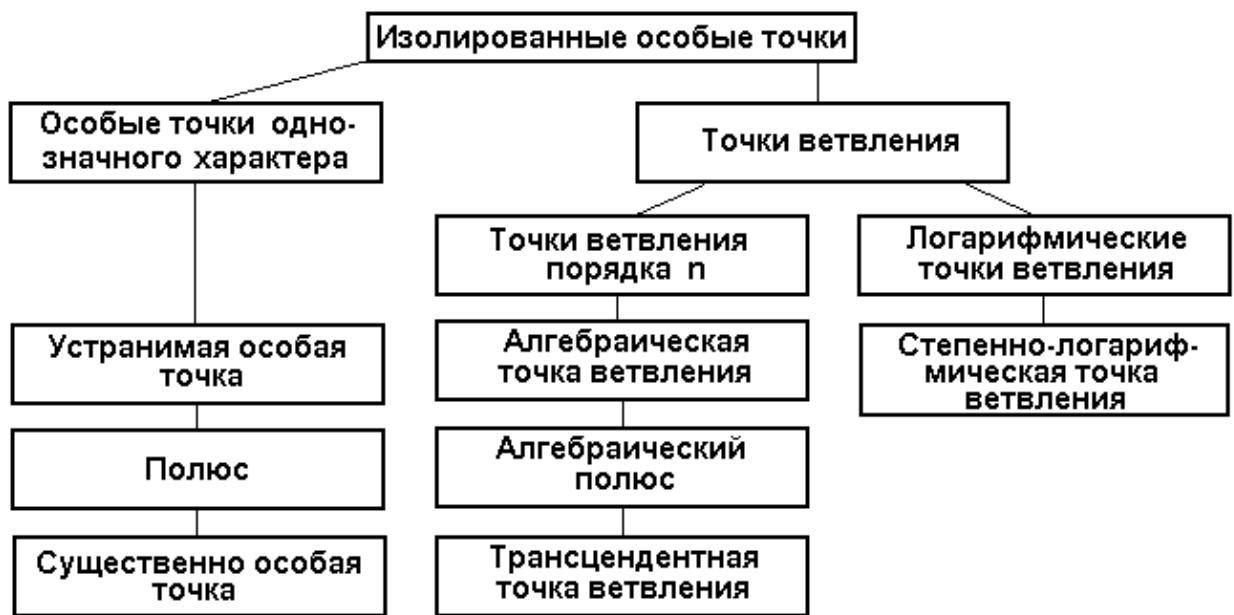


Рис. 3. Классификация изолированных особых точек

Пусть **f(u)** - функция, аналитическая в каком-либо кольце $0 < |u - a| < r$. Если она многозначна в этом кольце (не является регулярной), то точка **a** называется изолированной особой точкой многозначного характера. Такие особенности часто называют точками ветвления.

Если число различных элементов в каждой точке кольца бесконечно, то точка **a** называется логарифмической точкой ветвления. Примером такой точки может

являться точка $u=0$ для функции $f(u) = \ln u$. Напомним, что комплексный логарифм является многозначной функцией и определяется как

$$\ln u = \ln |u| + i \arg u + 2k\pi i, \quad (3.5)$$

где k - произвольное целое число.

Среди логарифмических точек ветвления выделяют степенно-логарифмические точки ветвления n -го порядка - такие, в которых функция $f(u)$ представима в виде:

$$f(u) = (u - a)^n \ln(u - a)A(u) + B(u), \quad (3.6)$$

где $A(u)$ и $B(u)$ - функции, регулярные в точке a .

Если число различных элементов $f(u)$ в каждой точке кольца конечно и равно n , то точка a называется точкой ветвления порядка n . Среди них также различают несколько типов. Если в кольце все ветви при $u \rightarrow a$ стремятся к одному и тому же конечному или бесконечному пределу, то точка a называется алгебраической точкой ветвления. В частности, бесконечный предел характеризует алгебраическую точку ветвления, называемую алгебраическим полюсом. Если же предел $f(u)$ при $u \rightarrow a$ не существует, то a называют трансцендентной точкой ветвления n -го порядка. Примером функции, имеющей конечное число ветвей, может являться радикал. В точке $u=0$ следующие функции имеют точки ветвления n -го порядка: функция $\sqrt[n]{u}$ - алгебраическую точку ветвления, функция $\frac{1}{\sqrt[n]{u}}$ - алгебраический полюс, функция $\exp \frac{1}{\sqrt[n]{u}}$ - трансцендентную точку ветвления.

Таким образом, зная аналитическое выражение функции, достаточно легко установить, где ее особые точки и какого они типа.

§ 4. СВЯЗЬ ОСОБЫХ ТОЧЕК ФУНКЦИЙ, ОПИСЫВАЮЩИХ ГРАВИТАЦИОННЫЕ И МАГНИТНЫЕ АНОМАЛИИ, С ФОРМОЙ ИХ ИСТОЧНИКОВ

Интерпретация гравитационных и магнитных аномалий методами особых точек базируется на знании связей между особыми точками функций, описывающих различные элементы аномальных полей, и формой их источников. При этом важно понимать, как ведет себя изучаемая функция в окрестности особенностей различных типов. Рассмотрим типовые модели, наиболее часто встречающиеся на практике, и начнем с простейшего из объектов - кругового цилиндра. Его поперечное сечение имеет форму круга.

Пусть центр круга совпадает с началом координат, тогда в произвольной точке на вертикальной плоскости $u=x+iz$ комплексная напряженность гравитационного поля будет иметь вид:

$$G(u) = -\frac{2\pi f\sigma R^2 i}{u}, \quad (4.1)$$

где σ - плотность модели, f - гравитационная постоянная, а R - радиус круга. Эта функция является однозначной и имеет полюс первого порядка в центре круга при $u=0$. Изолинии аналитического продолжения силы тяжести $\Delta g = -g_z$, имеют в вертикальной плоскости форму окружностей, касающихся друг друга и оси абсцисс в особой точке, что видно из рис. 4б. Отметим, что изолинии аналитического продолжения внешнего поля внутри круга отличаются от изолиний силы тяжести, терпящих излом на границе (рис. 4а), то есть внутреннее поле и аналитическое продолжение внешнего поля внутрь тела - принципиально различаются.

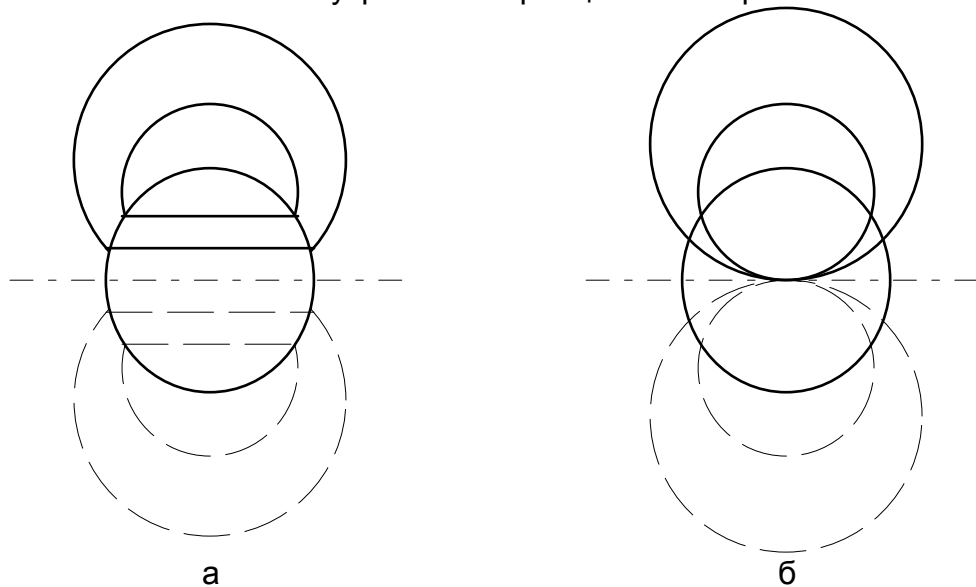


Рис. 4. Изолинии Δg горизонтального кругового цилиндра в вертикальной плоскости: положительные - сплошные, отрицательные - пунктирные, нулевая - штрих-пунктирная; а) реальное поле; б) аналитическое продолжение внешнего поля внутрь цилиндра (изолинии функции в окрестности полюса первого порядка)

Комплексная индукция магнитного поля такого же круга имеет вид

$$T(u) = \frac{\mu_0 i I R^2}{2u^2}, \quad (4.2)$$

где μ_0 - магнитная постоянная в системе СИ, а I - комплексная намагниченность. Эта функция также является однозначной и имеет полюс второго порядка в центре круга при $u=0$. Изолинии ее компонент пересекаются в особой точке, что отражает рис. 5. Градиенты магнитного поля, как следует из (4.2), имеют полюс третьего порядка в центре круга и т.д.

Формулы (4.1) и (4.2) связаны соотношением Пуассона, которое в комплексной форме для однородных и однородно намагниченных двумерных тел можно записать следующим образом:

$$T(u) = \frac{\mu_0 I}{4\pi f \sigma} \cdot \frac{dG(u)}{du}. \quad (4.3)$$

Строго говоря, это соотношение справедливо лишь для эллиптических цилиндров, а для тел других форм может применяться как приближенное при небольшой величине их магнитной восприимчивости. У сильномагнитных тел из-за эффекта размагничивания в собственном аномальном поле намагниченность существенно неоднородна даже при условии однородности магнитных свойств и для однородного намагничивающего поля, поэтому анализ особых точек для них более сложен. Здесь же мы ограничимся случаем тел с небольшой магнитной восприимчивостью. При анализе их полей и особых точек соотношение Пуассона играет важную роль. Из него, в частности, следует, что функция, описывающая градиенты гравитационного поля, имеет те же особые точки, что и магнитная аномалия слабомагнитного тела.

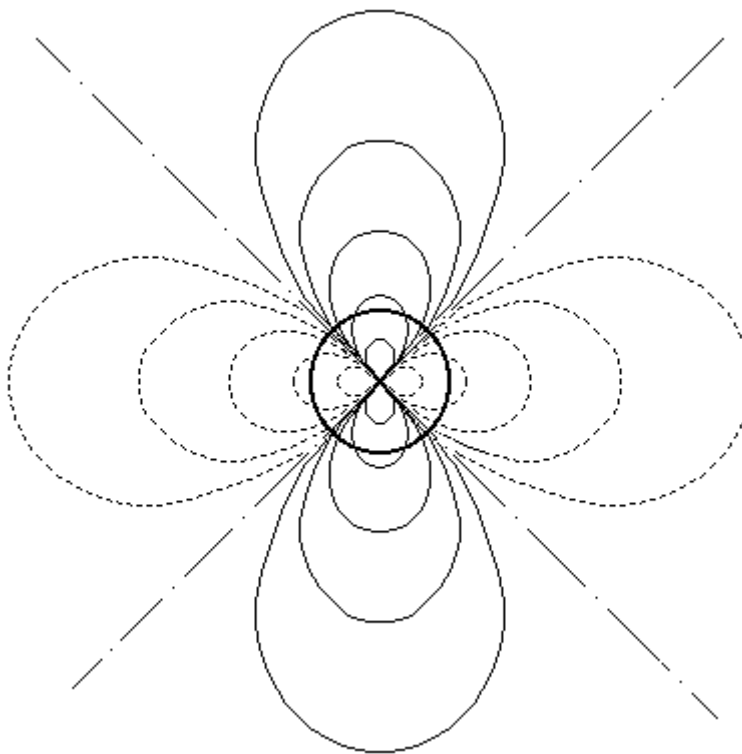


Рис. 5. Изодинамы вертикальной компоненты магнитной индукции горизонтального кругового цилиндра (изолинии функции в окрестности полюса второго порядка)

В общем случае имеет место следующая закономерность. При дифференцировании аналитической функции, особые точки не меняют своего

местоположения, а меняют лишь свой тип. Эта закономерность является весьма ценной для локализации особых точек. Дело в том, что особые точки некоторых типов удобны для локализации с помощью аналитического продолжения вниз, то есть в сторону источников, а других типов - не удобны. В рассмотренном примере полюса первого порядка - неудобные, а полюса второго и третьего порядков - удобные. Это значит, что для локализации центров изометричных тел по гравитационным аномалиям удобно продолжать их градиенты. Для магнитных же аномалий можно продолжать сами наблюдаемые функции. Удобство особых точек при продолжении заключается в том, что изолинии вблизи них пересекаются, подходя к особенности почти вертикально, что дает возможность не продолжая функцию в саму точку, где она теряет аналитичность, экстраполировать изолинии вниз до пересечения. На этой операции основан предложенный В.Н.Страховым способ локализации особых точек, часто называемый продолжением в горизонтальный слой, который будет подробно рассмотрен ниже.

Особые точки элементов гравитационного и магнитного полей круга являются точками однозначного характера, но у большинства моделей геологических объектов поля имеют особенности типа точек ветвления. Так комплексная напряженность гравитационного поля пластинки (тонкого пласта) имеет вид:

$$G(u) = 2if\sigma_{\text{пов}} \frac{|w_2 - w_1|}{w_2 - w_1} \ln \frac{u - w_2}{u - w_1}, \quad (4.4)$$

где w_1 и w_2 - комплексные координаты краев пластинки, а $\sigma_{\text{пов}}$ - ее поверхностная плотность. Края пластинки совпадают с логарифмическими точками ветвления функции, описывающей ее гравитационную аномалию. Изолинии гравитационного поля пластинки являются дугами окружностей, опирающихся на пластинку как на хорду, что иллюстрирует рис. 6. У градиентов гравитационных аномалий, а также у компонент и модуля магнитного поля особые точки на краях пластинки являются полюсами первого порядка.

Комплексная напряженность гравитационного поля однородного многоугольника с вершинами в точках w_n выражается формулой

$$G(u) = f\sigma \sum_{n=0}^N K_n (u - w_n) \ln(u - w_n), \quad (4.5)$$

где K_n - комплексная постоянная, относящаяся к n -ой вершине и определяемая соотношением

$$K_n = \frac{\bar{w}_n - \bar{w}_{n-1}}{w_n - w_{n-1}} - \frac{\bar{w}_{n+1} - \bar{w}_n}{w_{n+1} - w_n} = 2 \left(\frac{\xi_n - \xi_{n-1}}{w_n - w_{n-1}} - \frac{\xi_{n+1} - \xi_n}{w_{n+1} - w_n} \right). \quad (4.6)$$

Здесь черта над \bar{w} означает комплексное сопряжение. Напомним, что $w = \xi + i\zeta$, а сопряженная $\bar{w} = \xi - i\zeta$. Применяя к полученному выражению соотношение Пуассона, получим комплексную индукцию магнитного поля произвольного многоугольника:

$$T(u) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \sum_{n=1}^N K_n \ln(u - w_n). \quad (4.7)$$

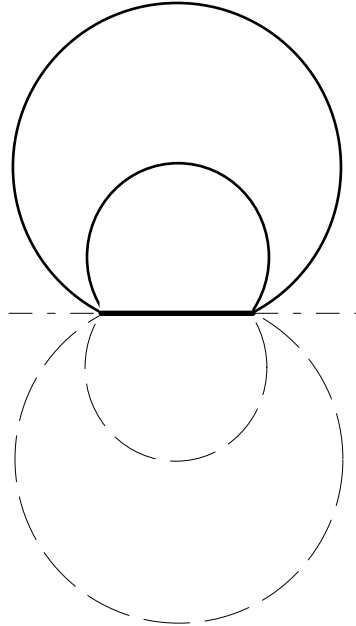


Рис. 6. Изолинии аналитического продолжения поля Δg горизонтальной пластинки в вертикальной плоскости (изолинии функции в окрестности логарифмических точек ветвления)

Анализ формул приводит к выводу о том, что у многоугольника особые точки совпадают с его вершинами. Для гравитационного поля они являются степенно-логарифмическими точками ветвления первого порядка, для его градиентов и для компонент и модуля магнитного поля - логарифмическими точками ветвления. Характер изолиний аналитического продолжения функций в окрестностях этих точек показан на рис. 7.

Алгебраические точки ветвления отмечаются у эллипса и совпадают с его фокусами. Для гравитационного поля в фокусах - предел конечен, для магнитного поля и для градиентов гравитационного - бесконечен, то есть эти точки для магнитного поля являются алгебраическими полюсами. На практике точки такого типа встречаются крайне редко. Это же можно отнести и к трансцендентным точкам ветвления.

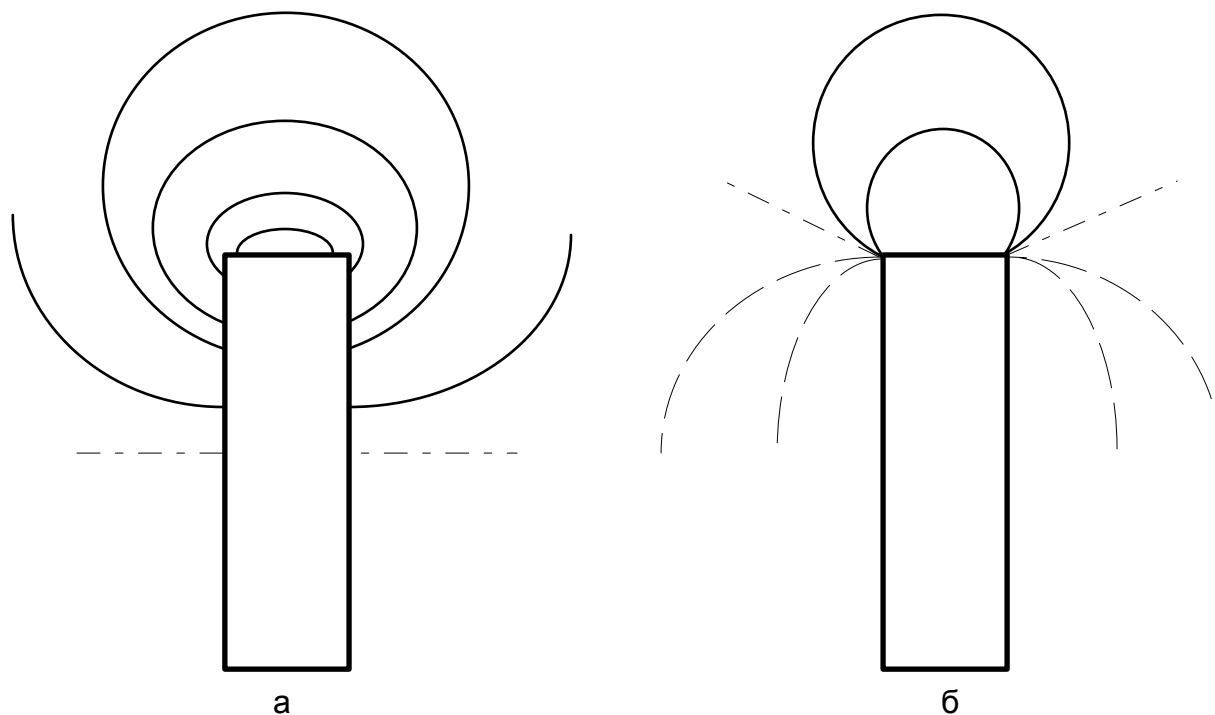


Рис.7. Аналитическое продолжение полей прямоугольника: а) Δg (изолинии функции в окрестности степенно-логарифмических точек ветвления), б) W_{zz} (изолинии функции в окрестности логарифмических точек ветвления)

Подводя итоги, можно сделать вывод о тесной связи местоположения и типа особых точек функций, описывающих гравитационные и магнитные аномалии, с формой их источников. Для локализации особых точек можно аналитически продолжить поле или его производные на ряд уровней в вертикальной плоскости и, экстраполировать их до пересечения вниз. При этом выбирается для продолжения такой элемент поля, для которого ожидаемый тип особенностей будет удобен. К удобным для локализации таким способом особым точкам относятся: полюса второго и третьего порядков, логарифмические точки ветвления и алгебраические полюса. К неудобным для локализации особым точкам относятся: полюса первого порядка, степенно-логарифмические точки ветвления первого порядка и алгебраические точки ветвления. Если для наблюдаемого поля тип особых точек - неудобен, надо продолжать ее производные.

Последовательное дифференцирование функции приводит к закономерной смене типов ее особых точек, в то время как их местоположение остается неизменным. Закономерность смены типов особенностей можно представить в виде схемы, показанной на рис. 8. Из этой схемы следует, что функции, описывающие гравитационные и магнитные аномалии наиболее часто встречающихся на практике моделей, после нескольких дифференцирований становятся мероморфными, то есть имеющими особенности только типа полюсов различных порядков. Этот факт

используется в способе локализации особых точек, предложенном Г.А.Трошковым. Отметим, что алгебраические точки ветвления в этой схеме не отмечены, поскольку они в результате дифференцирования функции остаются алгебраическими особенностями, только после некоторого числа дифференцирований (для гравитационной аномалии эллипса - уже после первого) становятся алгебраическими полюсами.

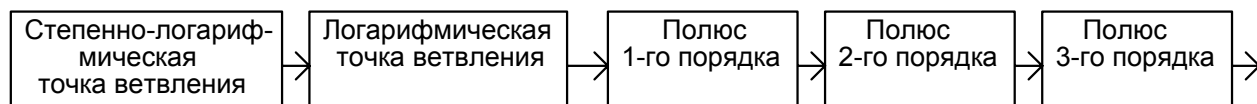


Рис. 8. Изменение типов особых точек при дифференцировании функции

Интерпретатор должен четко понимать, что, хотя особые точки, невзирая на отсутствие априорной информации, локализуются по полю вполне объективно - истолкование результатов их локализации так же неоднозначно, как неоднозначно и решение обратной задачи. Найденный полюс первого порядка может указывать и на то, что гравитационная аномалия вызвана круговым цилиндром, и на то, что она связана с контактной поверхностью в форме конхоиды Слюза. Логарифмические точки ветвления могут быть связаны не только с краями тонкого пласта и с эквивалентной ему контактной поверхностью, но и с замкнутым объектом (называемым "мудрецидой"), имеющим гладкую границу, внешне похожую на эллипс, но описываемую трансцендентной функцией. Степенно-логарифмические точки ветвления могут характеризовать вершины многоугольника, но могут оказаться и внутри эквивалентного ему замкнутого тела с гладкой границей и т.п. Конкретное геологическое истолкование локализованных особенностей, естественно, должно опираться на априорную информацию, тем не менее знание местоположения и типа особых точек значительно упрощает работу интерпретатора, особенно на ранних стадиях геологоразведочных работ.

Очевидно, для однозначного определения местоположения и типа особенностей необходимо знать абсолютно точное, с бесконечным числом значащих цифр интерпретируемое поле в бесконечном числе точек. На практике конечно абсолютной точности достичь нельзя, поэтому важнейшее значение приобретают вопросы устойчивости локализации особенностей. Известно, что, вообще говоря, обратные задачи - неустойчивы: даже бесконечно малая помеха в исходных данных может приводить к существенным погрешностям в решении. При локализации особых точек неустойчивость может приводить не только к погрешностям в определении их местоположения, но и к изменению типа.

Рассмотрим несколько примеров. Пусть источник аномального поля представляет собой правильный многоугольник с большим числом сторон. Особые точки его

аномальных полей располагаются в вершинах и являются для гравитационного поля степенно-логарифмическими, а для магнитного - логарифмическими точками ветвления. Если многоугольник расположен на достаточно большой глубине, его аномальные поля чрезвычайно близки к полю равновеликого круга. У круга же особенность расположена в центре и является полюсом: для гравитационного поля - первого порядка, а для магнитного - второго. Естественно, при интерпретации наблюдаемых аномалий, осложненных помехами различного происхождения, локализуются не истинные особенности, а полюса в центре масс эквивалентного круга. Этому также способствует фильтрация, применяемая для подавления помех. У эллипса особенности располагаются в фокусах и являются алгебраическими точками ветвления. Если же эллипс лежит на относительно большой глубине, вместо этих точек также локализуется полюс в центре масс.

Это явление справедливо для любых замкнутых тел. При их залегании на большой глубине информация о деталях строения тел в аномальном поле как бы стирается и локализуются лишь особенности наиболее простых моделей, практически эквивалентных по полю исходному сложному объекту. Данная закономерность может быть конструктивно использована при локализации. Дело в том, что устойчиво локализуются по аномальному полю лишь верхние особые точки. Вместе с тем, пересчитывая исходное поле на некоторую высоту, мы можем как бы стирать более слабые верхние особенности и определять местоположение центров масс отдельных тел в разрезе. Таким путем добиваются локализации более глубоких особенностей, например, в методе Г.А.Трошкова.

Пусть исходный объект представляет собой прямоугольник, изображенный на рис. 9. Если уровень наблюдения его аномального поля отвечает небольшой глубине залегания (помеченной на рисунке цифрой 1), то достаточно устойчиво локализуются особенности в его вершинах на верхней кромке, являющиеся для гравитационного поля степенно-логарифмическими, а для магнитного - логарифмическими точками ветвления. На рисунке они также отмечены цифрами 1. Если уровень наблюдения аномального поля прямоугольника отвечает большей глубине его залегания (помеченной на рисунке цифрой 2), то локализуются особенности на уровне центра масс, отвечающие краям эквивалентной пластинки и обозначенные цифрой 2. Для гравитационного поля они являются логарифмическими точками ветвления, а для магнитного - полюсами первого порядка. Наконец, с уровня, помеченного цифрой 3, для которого глубина залегания объекта сопоставима с его видимой мощностью, устойчиво локализуется лишь точка в центре масс (обозначенная на рисунке цифрой 3). Для гравитационного поля это полюс первого порядка, а для магнитного - полюс второго порядка.

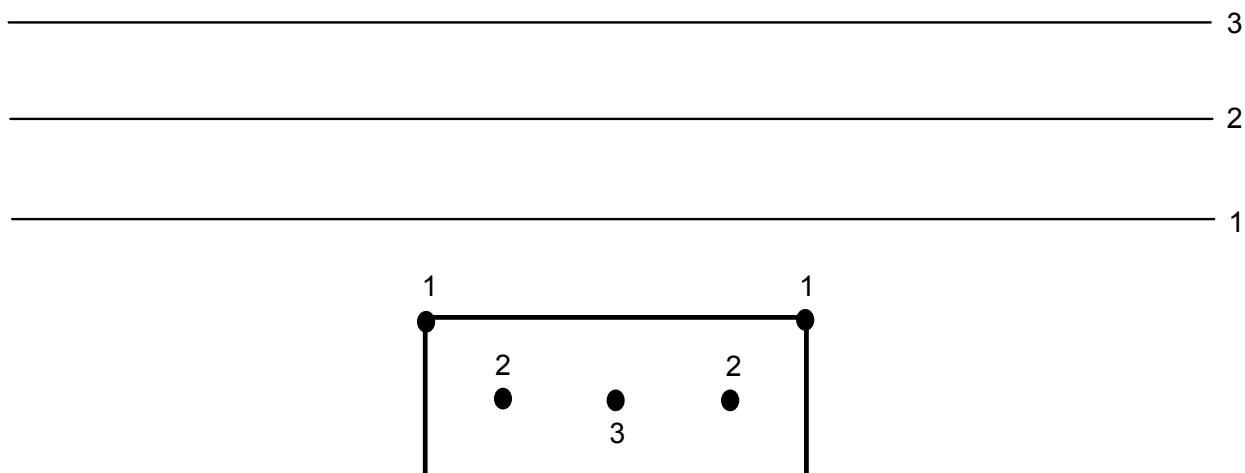


Рис. 9. Изменение местоположения и типа локализуемых особенностей в зависимости от глубины залегания источника, связанное с неустойчивостью обратной задачи

Знание отмеченных закономерностей изменения местоположения и типа особых точек в процессе пересчета вверх помогает при синтезе результатов локализации и при построении модели изучаемого объекта.

§ 5. ЛОКАЛИЗАЦИЯ ОСОБЫХ ТОЧЕК С ПОМОЩЬЮ АППРОКСИМАЦИОННОГО ПРОДОЛЖЕНИЯ

Рассмотренные в предыдущем параграфе примеры показывают, что местоположение и тип особых точек функций, описывающих гравитационные и магнитные аномалии, могут быть определены по поведению изолиний аналитического продолжения наблюдаемого поля или его производных в сторону источников. На этой базе В.Н.Страховым разработан способ локализации особых точек путем аналитического продолжения в горизонтальный слой, включающий все верхнее полупространство и часть нижнего полупространства до глубины H ближайшей к дневной поверхности особой точки.

Аналитическое продолжение функционально заданных потенциальных полей в верхнее и нижнее полупространства, как и любых трансформаций, удобно проводить в спектральной форме, переходя от самих функций к их преобразованиям Фурье. Для этого вначале по исходной функции $U(x)$, описывающей какой-либо элемент потенциального поля, с помощью прямого преобразования Фурье

$$S(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U(x) e^{-i\omega x} dx \quad (5.1)$$

определяется спектр $S(\omega)$. Аргументом спектра является пространственная частота ω , размерность которой обратна размерности расстояния. На практике размерность

пространственной частоты обычно принимают равной км^{-1} . Умножение спектра исходной функции на частотную характеристику применяемой трансформации $F(\omega)$ дает возможность вычислить спектр трансформанты:

$$S_{\text{тр}}(\omega) = S(\omega)F(\omega). \quad (5.2)$$

Наконец, с помощью обратного преобразования Фурье определяется искомая трансформанта:

$$U_{\text{тр}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{тр}}(\omega) e^{i\omega x} d\omega. \quad (5.3)$$

Очевидно, характер применяемой трансформации полностью определяется ее частотной характеристикой. Выведем ее для аналитического продолжения. Если принять, что вертикальная ось z направлена вверх, а исходное поле задано на уровне $z=0$, аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость может быть описано известной формулой Пуассона, представляющей решение внешней задачи Дирихле для плоскости:

$$U(x, z) = \frac{z}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(\xi, 0) d\xi}{(\xi - x)^2 + z^2}. \quad (5.4)$$

Вычислим преобразование Фурье для левой и правой частей этого соотношения:

$$\begin{aligned} S(\omega, z) &= \frac{z}{\pi\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(\xi, 0) d\xi}{(\xi - x)^2 + z^2} \right\} e^{-i\omega x} dx = \\ &= \frac{z}{\pi\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U(\xi, 0) e^{-i\omega\xi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega(x-\xi)} d(x-\xi)}{(x-\xi)^2 + z^2} = \\ &= \frac{z}{\pi\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U(\xi, 0) e^{-i\omega\xi} \frac{\pi}{z} e^{-|\omega|z} d\xi = e^{-|\omega|z} S(\omega, 0). \end{aligned} \quad (5.5)$$

При этом мы воспользовались известным интегралом Лапласа:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pm i\omega x} dx}{x^2 + a^2} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \omega x dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} e^{-|\omega|a}. \quad (5.6)$$

Соотношение (5.5) связывает спектры гармонической функции на двух уровнях: нижнем и верхнем, и его можно применять как для продолжения вверх, так и для продолжения вниз, то есть для случая $z < 0$. Частотная характеристика продолжения вверх представляет собой убывающую с ростом частоты экспоненту, а вниз - возрастающую. Таким образом, частотная характеристика аналитического продолжения вверх и вниз может быть выражена в виде

$$F(\omega) = e^{-|\omega|z}. \quad (5.7)$$

Применение спектров при локализации особых точек удобно еще и потому, что по ним достаточно легко определить параметр H , то есть глубину ближайшей к

дневной поверхности особой точки, определяющей нижнюю границу слоя, в который наблюденное поле можно аналитически продолжить. Это определение базируется на использовании следующего соотношения, доказанного В.К.Ивановым:

$$H = - \lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \sup \frac{\ln |S(\omega, 0)|}{|\omega|}. \quad (5.8)$$

Оно означает, что график логарифма амплитудного спектра при $|\omega| \rightarrow \infty$ стремится к наклонной асимптоте с уравнением $y = c - H|\omega|$.

На практике, естественно, поля задаются не функционально, а в виде значений в конечном числе точек, что заставляет от преобразований Фурье переходить к тригонометрическим полиномам, то есть к отрезкам рядов Фурье. Пусть исходное поле задано на профиле длиной L с равномерным шагом. Тогда его можно представить в виде бесконечного ряда Фурье:

$$U(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{\pi n x}{L} + B_n \sin \frac{\pi n x}{L} \right), \quad (5.9)$$

при этом подразумевается, что за пределами отрезка наблюдений поле периодически повторяется. Дополнительно предположив характер повторения как четно или нечетно симметричный, в (5.9) можно опустить ту часть, которая имеет другой тип симметрии и тем самым упростить вычисления. Коэффициенты разложения рассчитываются по известным формулам:

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L U(x) \cos \frac{\pi n x}{L} dx \quad (5.10)$$

и

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L U(x) \sin \frac{\pi n x}{L} dx \quad (5.11)$$

любым численным методом, например, методом трапеций. Отметим, что алгоритмы быстрого преобразования Фурье при решении задачи локализации особых точек не эффективны, так как базируются на самом неточном методе интегрирования - методе прямоугольников.

Бесконечное число коэффициентов ряда, очевидно, не может быть определено, поэтому практически оно ограничивается некоторым номером N :

$$U(x) = \sum_{n=0}^N \left(A_n \cos \frac{\pi n x}{L} + B_n \sin \frac{\pi n x}{L} \right), \quad (5.12)$$

тем самым ряд Фурье превращается в тригонометрический полином. Формулу (5.12) можно рассматривать как результат применения к ряду (5.9) прямоугольного фильтра. Хотя подобная фильтрация уничтожает высокочастотную часть спектра,

она не всегда приводит к хорошим результатам, поэтому в (5.12) вводят дополнительные фильтры. Одним из наиболее распространенных является фильтр вида

$$\left(\frac{\sin \frac{\pi n}{N}}{\frac{\pi n}{N}} \right)^2, \quad (5.13)$$

после умножения на него формула (5.12) становится удобной для практических вычислений.

Будем считать исходную функцию периодической и нечетной. Если при этом она на краях профиля равна нулю, ряд синусов сходится быстрее. Этого можно добиться, вычитая региональный фон вида

$$f(x) = U(0) + \frac{U(L) - U(0)}{L} x, \quad (5.14)$$

поскольку вычитание из исходного поля линейной функции не меняет местоположения и типа искомых особенностей. После этого для произвольной точки при условии $z \gg H$ вычислительная формула аналитического продолжения поля принимает вид:

$$U(x, z) = \sum_{n=1}^N B_n \sin \frac{\pi n x}{L} e^{-\frac{\pi n z}{L}} \left(\frac{\sin \frac{\pi n}{N}}{\frac{\pi n}{N}} \right)^2. \quad (5.15)$$

Если продифференцировать ее по x и по z , легко получить аналогичные формулы для вычисления горизонтального или вертикального градиентов поля на разных высотах, устойчивые к помехам:

$$W_{xz}(x, z) = \frac{\pi}{L} \sum_{n=1}^N n B_n \cos \frac{\pi n x}{L} e^{-\frac{\pi n z}{L}} \left(\frac{\sin \frac{\pi n}{N}}{\frac{\pi n}{N}} \right)^2, \quad (5.16)$$

$$W_{zz}(x, z) = -\frac{\pi}{L} \sum_{n=1}^N n B_n \sin \frac{\pi n x}{L} e^{-\frac{\pi n z}{L}} \left(\frac{\sin \frac{\pi n}{N}}{\frac{\pi n}{N}} \right)^2. \quad (5.17)$$

Полученные формулы являются основой алгоритма, реализуемого на ЭВМ для локализации особых точек. Необходимо отметить, что, строго говоря, из-за наличия фильтрации он не является алгоритмом аналитического продолжения. В связи с

этим В.Н.Страхов предложил называть подобные алгоритмы алгоритмами аппроксимационного продолжения.

Локализация особых точек начинается с оценки параметра H , для чего предложено несколько различных способов. Наиболее удобно оценивать его непосредственно по спектру с помощью соотношения (5.8). Вместе с тем, практическое применение этого соотношения требует учета изменения свойств спектра из-за того, что мы от интеграла Фурье перешли к тригонометрическому полиному. На рис. 10 показаны реальная гравитационная аномалия и ее спектр.

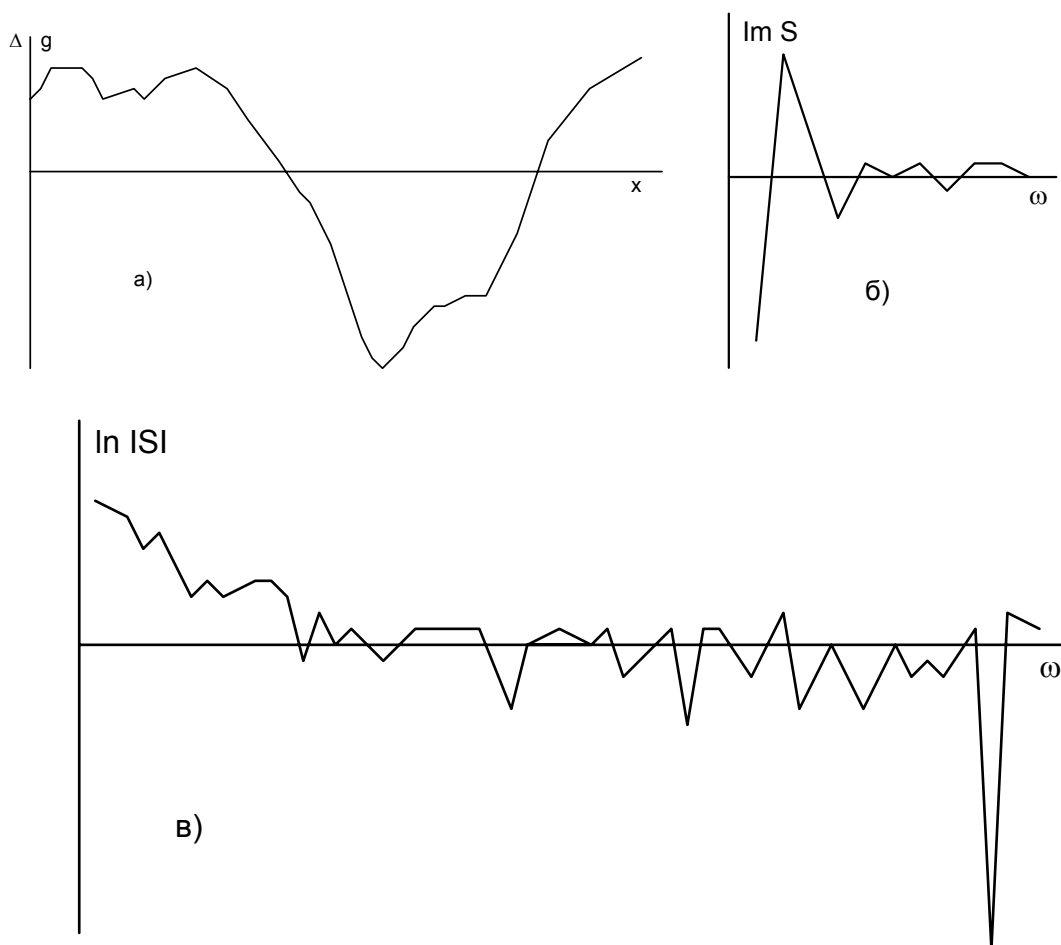


Рис.10. Гравитационная аномалия и ее спектр:

- а) аномалия силы тяжести; б) график мнимой части спектра в линейном масштабе;
 в) график логарифма амплитудного спектра

На рис. 10б приведен график мнимой части спектра аномалии, изображенной на рис. 10а, то есть график, отражающий рассчитанные гармоники B_n . На рис. 10в показан график логарифма модуля спектра этой аномалии. На нем отчетливо выделяются три части: низкочастотная, среднечастотная и высокочастотная. Низкочастотная часть, отвечающая аномалиям большой протяженности, преимущественно характеризует особенности регионального поля. Среднечастотная

часть характеризует в основном локальные аномалии и их особые точки. Наконец, самая высокочастотная часть связана с помехами от верхней части разреза и с погрешностями съемки. Легко заметить, что график логарифма амплитудного спектра аппроксимируется на средних частотах наклонной прямой. Угловой коэффициент этой прямой и равен $-H$. Таким образом, по графику логарифма амплитудного спектра можно достаточно легко определить глубину верхней особой точки функции, описывающей аномальное поле. Аппроксимируя прямой низкочастотную часть графика, можно оценить и глубину более низких особенностей на нижней кромке или в центре масс изучаемых объектов.

Вторым этапом локализации является выбор продолжаемого элемента поля. При этом на основе морфологического анализа графика наблюдаемого поля с привлечением априорной информации надо определить ожидаемый тип локализуемых особенностей и подобрать такой элемент поля, продолжая который искомые точки удобно локализовать. Принципы такого выбора описаны в предыдущем параграфе. На практике обычно для продолжения используют либо само поле, либо его горизонтальные или вертикальные градиенты.

На следующем этапе выбранный элемент с помощью описанного алгоритма продолжают на несколько уровней вверх и вниз, причем общее число уровней должно быть не меньше 5. Так как параметр H определен с некоторой погрешностью, продолжение вниз обычно проводят вплоть до глубины, равной $0,7H$. По результатам продолжения строят изолинии выбранного элемента в вертикальной плоскости интерпретационного профиля.

Завершающим этапом локализации является экстраполяция изолиний вниз вплоть до пересечения. Точки пересечения изолиний и являются особыми точками функции, описывающей аномальное поле. Если тип особых точек интерпретируемой функции отличается от ожидаемого, эта операция может оказаться неустойчивой, тогда надо изменить продолжаемый элемент поля и повторить локализацию.

На рис. 11 представлены результаты локализации особых точек функции, описывающей гравитационную аномалию, показанную на рис. 10, с помощью аппроксимационного продолжения ее вертикального градиента.

Гравитационный минимум в платформенных условиях может наблюдаться как над синклиналью, если плотность пород возрастает с глубиной, так и над антиклиналью. В данном случае местоположение, глубина и тип особенностей, расположенных в точках излома контактной поверхности, свидетельствуют о наличии антиклинальной структуры, причем плотность перекрывающих пород больше, чем у подстилающих. Эти признаки с большой вероятностью указывают на наличие соляного купола.

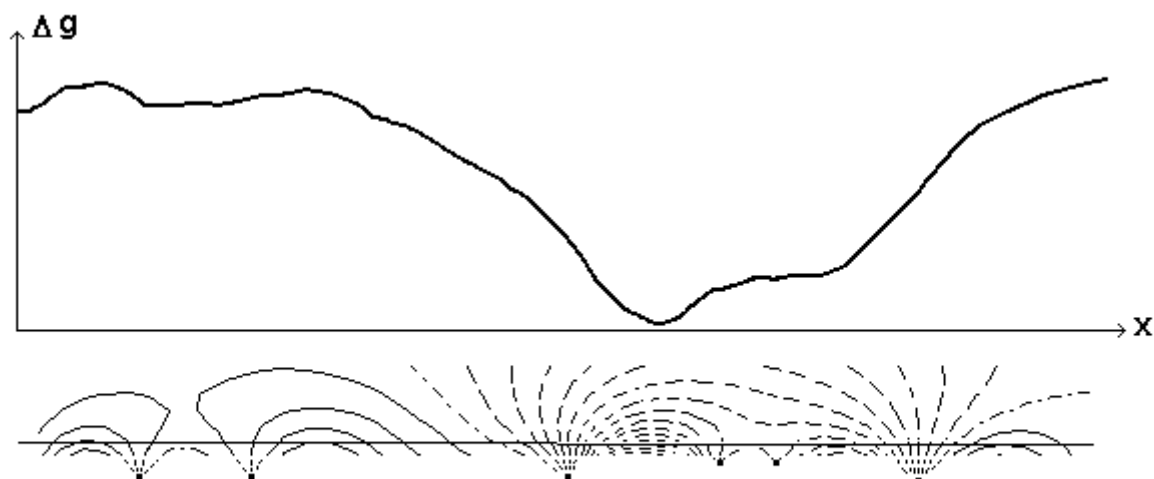


Рис. 11. Использование аппроксимационного продолжения вертикального градиента для локализации особых точек гравитационной аномалии над соляным куполом

Аппроксимационное продолжение элементов потенциальных полей в горизонтальный слой теоретически возможно вплоть до глубины H . Формально описанный алгоритм дает возможность вычислить функции и ниже этого уровня, но попытки такого вычисления наталкиваются на препятствие в виде так называемого эффекта распада поля. Оказывается, при дальнейшем продолжении поле как бы распадается на чередующиеся максимумы и минимумы, практически никак не связанные с геологическим строением. Пример проявления эффекта показан на рис. 12. Частота этой осцилляции тем больше, чем большее число гармоник N используется для гармонического синтеза элементов поля. Хотя эффект распада поля и мешает определению более глубоких особенностей, он может конструктивно использоваться для контроля правильности определения параметра H .

В настоящее время помимо аппроксимационного продолжения в горизонтальный слой разработаны методики продолжения в квадрант слева или справа от заданной вертикальной линии, а также во внешность окружности, охватывающей источники. Эти методики позволяют локализовать особые точки, характеризующие боковую, а в благоприятных условиях даже нижнюю кромку тел. Разумеется, устойчивость определения этих особенностей меньше, нежели верхних, однако, несмотря на это, информация о них чрезвычайно полезна для решения самых разнообразных геологических задач.

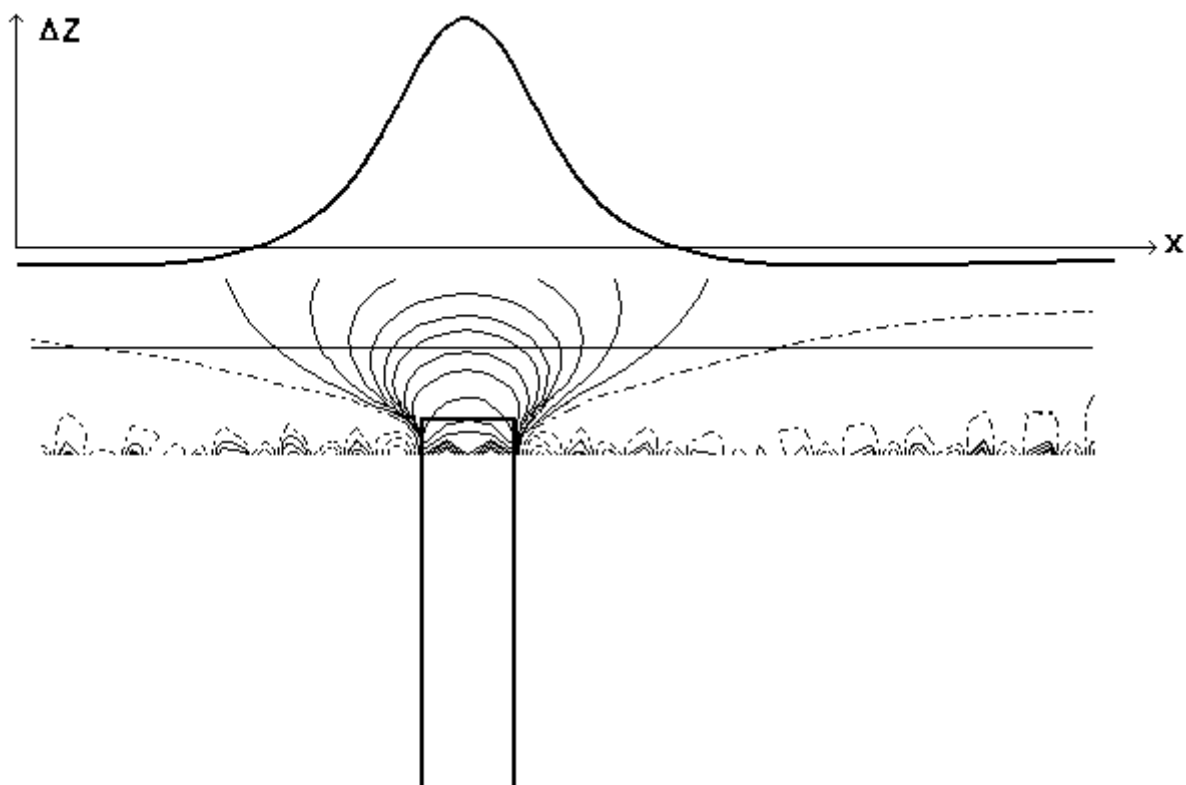


Рис. 12. Распадение магнитного поля вертикального пласта при аппроксимационном продолжении ниже уровня его верхних особых точек

§ 6. ЛОКАЛИЗАЦИЯ ОСОБЫХ ТОЧЕК СПОСОБОМ НОРМИРОВАННЫХ ФУНКЦИЙ

При локализации особых точек с помощью аппроксимационного продолжения приходится экстраполировать изолинии элементов полей. Точность выполнения этой операции в значительной степени зависит от опыта интерпретатора, что побуждает к разработке таких способов локализации, которые в ней не нуждаются. Одним из таких способов является способ нормированных функций, предложенный В.М.Березкиным и теоретически обоснованный В.Н.Страховым.

В способе В.М.Березкина производится продолжение вниз двух компонент магнитного поля (горизонтальной и вертикальной), либо двух соответствующих компонент градиента гравитационного поля. На нескольких уровнях вычисляется модуль магнитного поля, либо модуль градиента гравитационного поля, после чего полученная функция нормируется, то есть в каждой из точек делится на среднее ее значение на данном уровне. Эти операции проводятся не только при $z > -H$, но и на больших глубинах, в том числе и в области, занятой источниками, куда невозможно осуществить аналитическое продолжение в его строгом понимании, но где элементы поля можно формально вычислить по приведенным в предыдущем параграфе

формулам. Выражение для нормированного модуля градиента гравитационного поля G_H , который часто называют полным нормированным градиентом силы тяжести, имеет следующий вид:

$$G_H(x, z) = \frac{\sqrt{W_{xz}^2(x, z) + W_{zz}^2(x, z)}}{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sqrt{W_{xz}^2(x_i, z) + W_{zz}^2(x_i, z)}}, \quad (6.1)$$

а для нормированного модуля магнитного поля -

$$T_H(x, z) = \frac{\sqrt{X^2(x, z) + Z^2(x, z)}}{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \sqrt{X^2(x_i, z) + Z^2(x_i, z)}}, \quad (6.2)$$

где M - число точек наблюдений на интерпретационном профиле.

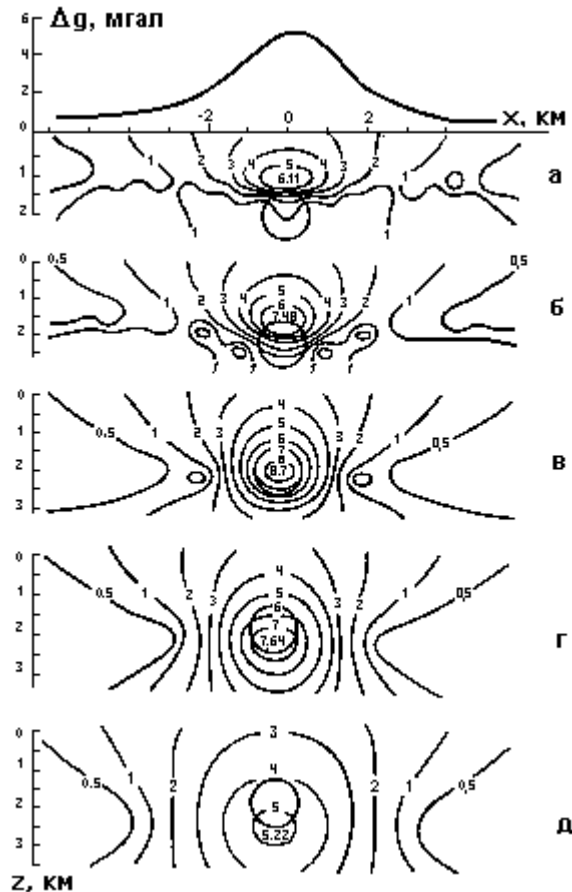


Рис. 13. Карты G_H в вертикальной плоскости для кругового цилиндра с разным числом гармоник N , использованных для гармонического синтеза (по В.М.Березкину): а - 60; б - 50; в - 40; г - 30; д - 20

Характерной особенностью данных нормированных функций является негармоничность, то есть их лапласиан не равен нулю. Из-за этого они могут иметь максимумы и минимумы в области продолжения, что невозможно для гармонических функций в силу так называемого принципа максимума. Оказывается, эти экстремумы при правильно выбранных параметрах продолжения совпадают с особыми точками поля, причем эффект распада поля для модулей практически не проявляется. На положение экстремумов существенно влияет число гармоник N в формулах (5.15) - (5.17), что иллюстрирует рис. 13. На нем показаны карты изолиний полного нормированного градиента силы тяжести в вертикальной плоскости при разных N для кругового цилиндра. При увеличении числа гармоник положение максимума смещается вверх, а при уменьшении - вниз. Вместе с тем, на рис. 13 можно отметить эмпирически обнаруженный факт, состоящий в том, что при правильно выбранном числе гармоник значение нормированной функции в экстремуме - наибольшее (рис. 13в). Этот факт носит название принципа автофокусировки при выборе числа гармоник. Множество подобных примеров приведено в монографии В.М.Березкина [2]. Надо отметить, что принцип автофокусировки на практике выполняется не всегда, а теоретическое исследование этого вопроса затруднительно. Часто выбор оптимального числа гармоник для района проводимых работ осуществляют на объектах с известным строением, после чего используют это значение на смежных участках.

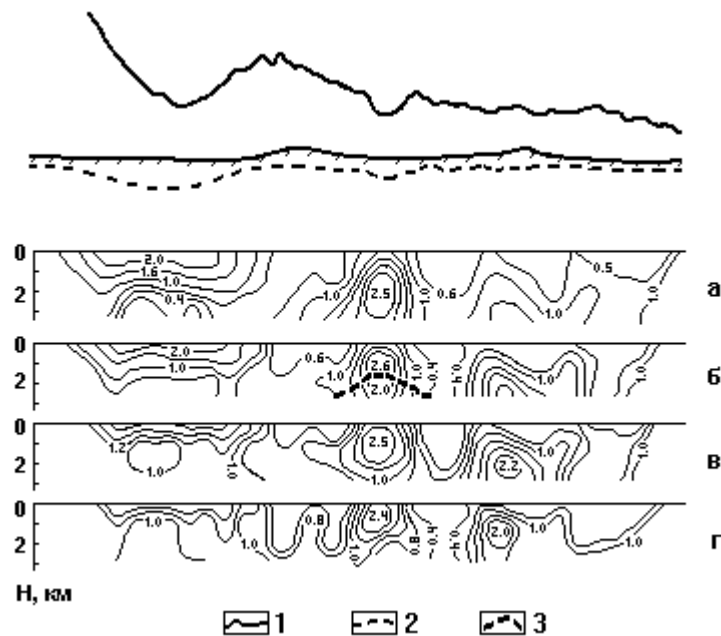


Рис. 14. График Δg и карты G_H в вертикальной плоскости для рифовой структуры (по В.М.Березкину). Число гармоник N : а - 40; б - 45; в - 50; г - 60; 1 - наблюдаемая аномалия Δg ; 2 - поверхность кунгурских отложений; 3 - схематическое положение рифа

Наибольшее применение способ В.М.Березкина нашел при интерпретации гравитационных аномалий на месторождениях нефти и газа. На рис. 14 показан пример локализации рифовой структуры, с которой связаны месторождения нефти и газа в Волго-Уральской области. Сложность локализации этой структуры состоит в наличии интенсивной помехи, связанной с влиянием поверхности кунгурских отложений, расположенных на сравнительно небольшой глубине (100-300 м) и имеющих большую избыточную плотность (до $0,3-0,5 \text{ г/см}^3$) по сравнению с вышележащими породами. Несмотря на влияние этой границы, также показанной на рис. 14, с помощью данного способа удалось уверенно локализовать рифовую структуру на глубине 1,5 км. В настоящее время способ весьма широко применяется как для решения задач нефтегазовой геофизики, так и для поисков рудных месторождений.

§ 7. ЛОКАЛИЗАЦИЯ ОСОБЫХ ТОЧЕК СПОСОБОМ ОТНОШЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ

Способ отношения производных, предложенный Г.А.Трошковым, базируется на рассмотренной в § 4 и проиллюстрированной на рис. 8 закономерности изменения типов особых точек при последовательном дифференцировании функций, описывающих гравитационные и магнитные аномалии. Дело в том, что функции, характеризующие поля наиболее часто встречающихся на практике моделей, после нескольких дифференцирований становятся мероморфными, то есть имеющими особенности только типа полюсов различных порядков.

Представим себе, что в изучаемом разрезе присутствуют многоугольники, тонкие пластины и круги, либо эквивалентные им объекты. Это значит, что функция, описывающая гравитационную аномалию данного разреза, имеет особые точки следующих типов: степенно-логарифмические точки ветвления первого порядка, логарифмические точки ветвления и полюса первого порядка. Соответственно, функция, описывающая магнитную аномалию разреза, содержит логарифмические точки ветвления, а также полюса первого и второго порядков. После двукратного дифференцирования функции, описывающей гравитационную аномалию, особые точки, не изменив местоположения, изменяют свой тип:

степенно-логарифмические точки ветвления первого порядка станут полюсами первого порядка;

логарифмические точки ветвления станут полюсами второго порядка;

полюса первого порядка станут полюсами третьего порядка.

Аналогично после однократного дифференцирования функции, описывающей магнитную аномалию, особые точки изменят свой тип следующим образом:

- логарифмические точки ветвления станут полюсами первого порядка;
- полюса первого порядка станут полюсами второго порядка;
- полюса второго порядка станут полюсами третьего порядка.

Обозначим мероморфную функцию, полученную после двукратного дифференцирования гравитационной аномалии либо после однократного дифференцирования магнитной аномалии, как $F(u)$. Для разреза рассматриваемого типа она представима в общем виде как

$$F(u) = \sum_{k=1}^n \frac{B_k}{(u - w_k)^p}, \quad (7.1)$$

где n - общее число полюсов в разрезе, w_k - комплексная координата k -го полюса, p - его порядок, а B_k - комплексный коэффициент, который можно рассматривать как "мощность" данного полюса. Порядок полюса фактически указывает на тип особой точки исходного поля и несет важнейшую информацию о его источнике. Примеры, рассмотренные в § 4, говорят о том, что

если $p=1$, данная особая точка, вероятно, соответствует вершине многоугольника, точке излома геологической границы;

если $p=2$, данная особая точка, вероятно, соответствует краю тонкой пластины, пласта;

если $p=3$, данная особая точка, вероятно, соответствует центру изометричного объекта, центру масс локального тела.

Для локализации особых точек и определения их параметров Г.А.Трошков предложил использовать следующий прием. Рассмотрим скользящее окно, включающее часть точек на исследуемом профиле. Поскольку вклад каждой из особенностей в общее поле (7.1) существенно зависит от расстояния точек до окна, будем считать, что в пределах сравнительно небольшого скользящего окна практически весь наблюдаемый эффект можно объяснить влиянием всего одной, самой близкой к центру окна особой точки. Это значит, что в окне вместо (7.1) можно использовать следующее приближенное соотношение:

$$F(u) \approx \frac{B_1}{(u - w_1)^p}. \quad (7.2)$$

Смещая окно вдоль профиля и определяя параметры эквивалентных особенностей, можно изучить все верхние особые точки. Для изучения более глубоких особенностей над центром скользящего окна на некоторой высоте задается так называемая опорная точка u_0 и все вычисления ведутся именно для нее. Если она находится на небольшой высоте, изучается верхняя особенность, при увеличении

высоты в соответствии с результатами, приведенными в § 4, большее влияние будут оказывать эквивалентные особенности на уровне центров масс объектов. Помимо этого, введение опорной точки даже на небольшой высоте помогает повышать устойчивость локализации, поскольку при пересчете вверх подавляются высокочастотные помехи.

Найдем производную функции (7.2) по u

$$F'(u) \approx - \frac{pB_1}{(u - w_1)^{p+1}} \quad (7.3)$$

и разделим (7.2) на (7.3). В результате оказывается, что при известном порядке полюса комплексная координата ближайшей особенности может быть определена по отношению последовательных производных:

$$w_1 \approx u + \frac{pF(u)}{F'(u)}. \quad (7.4)$$

Все параметры этой особенности, то есть w_1 , B_1 и p могут быть теоретически найдены с помощью выведенных Г.А.Трошковым предельных соотношений по трем последовательным производным при стремлении порядка производной к бесконечности.

Алгоритм локализации сводится к следующему. Вначале по исходному полю $U(x)$ определяют комплексные значения интеграла

$$R(m) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(x)dx}{(x + u_0)^m}, \quad (7.5)$$

с точностью до множителя представляющего собой производную $(m-1)$ -го порядка от исходной функции в опорной точке u_0 . Фактически этот интеграл берется численно в пределах скользящего окна, расположенного симметрично относительно горизонтальной координаты выбранной опорной точки. Далее по отношениям трех последовательных производных $R(m)$, $R(m+1)$ и $R(m+2)$ при $m \rightarrow \infty$ вычисляют параметры ближайшей к опорной точке особенности. Фактически вместо предельных соотношений при этом пользуются следующими приближенными формулами Г.А.Трошкова:

$$p \approx \frac{m|R(m+1)|^2 - (m-1)(m+1)|R(m)||R(m+2)|}{(m+1)|R(m)||R(m+2)| - m|R(m+1)|^2}, \quad (7.6)$$

$$w_1 \approx \frac{m+p-1}{m} \cdot \frac{R(m)}{R(m+1)} - u_0, \quad (7.7)$$

$$|B_1| \approx \frac{(p-1)! \cdot (m-1)! R(m)}{2\pi \cdot (m+p-1)!} |w_1 + u_0|^{m+p-1}, \quad (7.8)$$

после чего сдвигают окно (а, следовательно, и опорную точку) вдоль профиля и повторяют вычисления. Когда требуется находить особенности при разных высотах опорной точки над уровнем наблюдения, определения в скользящем вдоль профиля окне повторяют несколько раз.

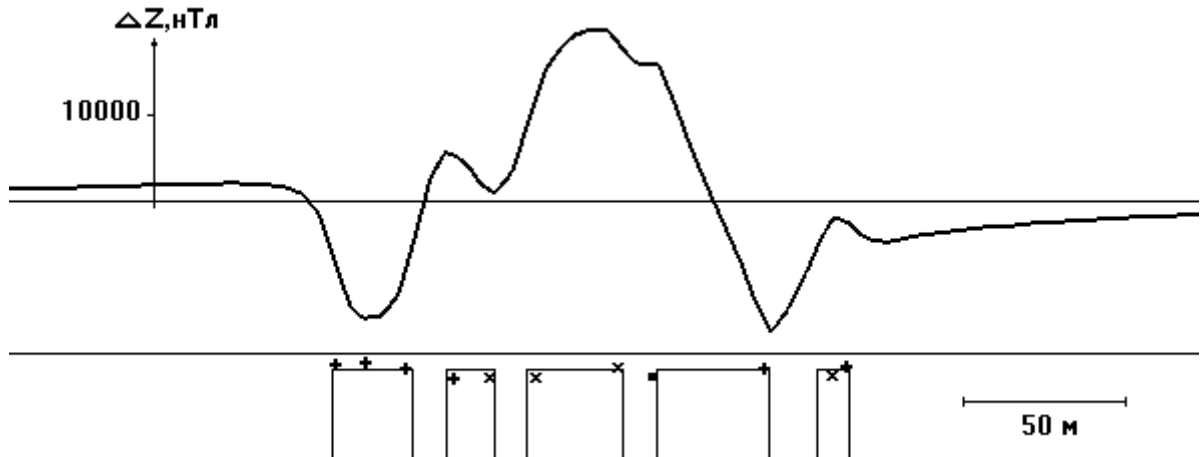


Рис.15. Результаты определения способом отношения производных местоположения и типа особых точек функции, описывающей магнитную аномалию на месторождении железистых кварцитов: (+) - логарифмические точки ветвления; (x) - полюса первого порядка; (•) - полюса второго порядка

В качестве примера на рис. 15 показаны результаты применения изложенного способа на одном из месторождений железистых кварцитов юга Якутии. Рудные тела здесь представляют собой мощные крутопадающие пласты, верхняя кромка которых расположена на глубине несколько метров. При этом значительная часть намагниченности руд является остаточной, резко изменяется от одного пласта к другому как по величине, так и по направлению и вызвана, вероятно, ударами молний, что усложняет морфологию аномалий и мешает установлению границ отдельных пластов. Тем не менее в этих сложных условиях способ отношения производных дал возможность достаточно хорошо локализовать особые точки, а по ним определить искомые границы.

ГЛАВА 3. МЕТОДЫ ПОДБОРА И РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

§ 8. ОСНОВЫ МЕТОДА ПОДБОРА

Наиболее популярным методом интерпретации гравитационных и магнитных аномалий является метод подбора, заключающийся в построении интерпретационной модели, принадлежащей некоторому классу единственности, удовлетворяющей априорной информации и создающей поле, которое в некотором смысле является минимально отличающимся от наблюдаемого. Применение метода подбора связано с разрешением трех взаимосвязанных проблем:

- 1) формирование содержательного класса единственности, учитывающего априорную информацию о возможном решении;
- 2) выбор критерия качества подбора наблюдаемого поля полем модели из заданного класса;
- 3) разработка алгоритма оптимизации модели в соответствии с выбранным критерием качества подбора.

В течение некоторого времени независимо развивались два основных направления применения метода подбора для решения обратных задач: детерминистское и статистическое. Характерные особенности этих направлений сводятся к следующему. Детерминистское направление рассматривает модели объектов и поля как элементы некоторых функциональных метрических пространств, в результате параметризации преобразующихся в точки многомерных евклидовых пространств. Модели помех в этом направлении не вводятся, характеризуются лишь их нормы в метриках соответствующих пространств. Статистическое направление исходит из четкого определения моделей помех. Указанные направления удачно дополняют друг друга. Так решение первой из отмеченных проблем, а именно формирование класса единственности, производится почти исключительно в рамках детерминистского направления. В то же время вторая проблема - выбор критерия качества подбора - гораздо более проработана в рамках статистического направления. Третья проблема решается в обоих направлениях фактически однотипно. В настоящее время происходит синтез этих направлений: переход при подборе к смешанным моделям, обладающим как детерминистскими, так и статистическими чертами.

Напомним вначале некоторые основные понятия. Обратные задачи, составляющие фундамент интерпретации аномальных полей, заключаются в определении местоположения, формы, размеров, элементов залегания и физических свойств изучаемых геологических объектов, удовлетворяющих имеющейся априорной информации, по создаваемым ими аномалиям. Совокупность указанных характеристик

изучаемых объектов образует после их обобщения и упрощения так называемую интерпретационную модель.

Пусть интерпретационная модель определяется n числами, называемыми параметрами. Некоторые из них описывают местоположение объектов, другие характеризуют их форму, размеры, элементы залегания и физические свойства. Упорядоченный список параметров соответствует многомерному вектору или координатам точки в n -мерном евклидовом пространстве R^n . Обозначим эту точку как $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$. Очевидно, не любой набор параметров определяет существующий в природе объект, следовательно, геологические объекты, описываемые этими параметрами, принадлежат множеству P , являющемуся лишь частью пространства R^n ($p \in P \subset R^n$). Обозначим через D оператор решения соответствующей прямой задачи. Применив его к какой-либо модели p , мы получим набор значений гравитационного или магнитного поля в m точках наблюдения. Этот набор значений поля можно рассматривать аналогично как точку u в m -мерном евклидовом пространстве R^m : $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$. В операторной форме решение прямой задачи выглядит так:

$$u = Dp, \quad (8.1)$$

его можно трактовать как отображение точки $p \in P \subset R^n$ в пространство R^m . Если отобразить все точки $p \in P$ в это пространство, то в нем получится множество DP . В этих обозначениях решение обратной задачи представляет собой решение операторного уравнения

$$Dp = u, \quad (8.2)$$

то есть обратное отображение точки u в пространство R^n .

В определении обратных задач особо подчеркнута роль априорной информации при их решении. Фактически различный объем имеющейся до проведения интерпретации информации об одном и том же объекте является источником различных решений обратной задачи. В основе этого - фундаментальные свойства, характеристики обратных задач: существование, единственность и устойчивость их решений. Очевидно, всегда существует природный объект, создавший обнаруженную в результате полевых геофизических работ аномалию. Вместе с тем, формальное решение уравнения (8.2) из-за наличия помех различного происхождения, осложняющих наблюденную аномалию, может и не существовать.

Обратимся к рис. 16. Реальный объект, создающий интересующую нас часть аномалии, можно обозначить в R^n как p_T (точное решение). Его образ в R^m есть $u_T = Dp_T$, который непременно принадлежит множеству DP . Помехи приводят к тому, что вместо u_T в правую часть (8.2) приходится подставлять приближенное значение u_n , то есть решать вместо (8.2) уравнение

$$Dp = u_n. \quad (8.3)$$

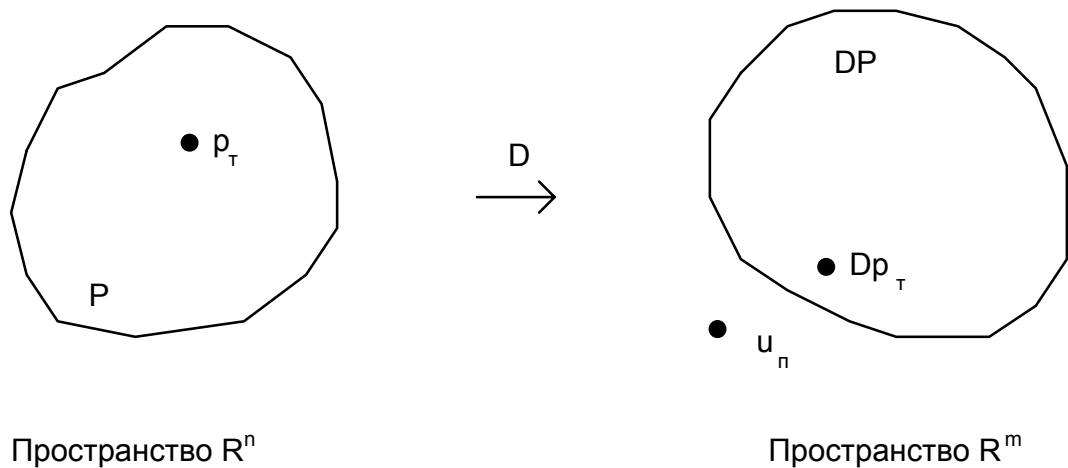


Рис. 16. К понятию квазирешения

Решение же этого уравнения существует не обязательно, поскольку u_n может не принадлежать множеству **DP**, то есть может не соответствовать ни одному из объектов множества **P**. Многочисленные примеры показывают также, что, вообще говоря, обратные задачи неоднозначны и неустойчивы. Следовательно, обратные задачи гравиразведки и магниторазведки являются некорректно поставленными, и в этих условиях необходимо строго определить, что именно требуется найти, решая уравнение (8.3). Различные определения приводят к разным методам, в том числе к методу квазирешений и методу регуляризации.

В основе детерминистского подхода к решению обратных задач методом подбора лежит понятие квазирешения, введенное В.К.Ивановым. Он предложил в качестве такового считать точку $p \in P \subset R^n$, образ которой $u \in DP \subset R^m$ находится на минимальном расстоянии от u_n .

Введем понятие нормы пространства R^m как модуля m -мерного вектора $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)$:

$$\|u\|_{R^m} = \left[\sum_{k=1}^m u_k^2 \right]^{1/2}. \quad (8.4)$$

Тогда расстояние между двумя точками в R^m будет являться нормой их разности. Назовем невязкой операторного уравнения $Dp = u$ следующую норму разности: $\|u - Dp\|_{R^m}$. В этих обозначениях квазирешением уравнения $Dp = u$ на множестве $P \in R^n$ называется модель $p \in P \subset R^n$, минимизирующая невязку этого уравнения по норме пространства R^m :

$$\|u - Dp\|_{R^m} = \min. \quad (8.5)$$

Обратим внимание на то, что определяется не абстрактное квазирешение, а квазирешение на конкретном множестве **P**. В геофизических терминах это значит, что

ищется квазирешение на множестве шаров, либо квазирешение на множестве призм, либо квазирешение на множестве контактных поверхностей и т. п.

Технологически удобнее искать решение не уравнения (8.5), а его естественного аналога:

$$\|u - Dp\|_{R^m}^2 = \min. \quad (8.6)$$

С учетом (8.4) мы фактически приходим к одной из разновидностей метода подбора, называемой методом наименьших квадратов. Статистическое направление для большинства практических обратных задач гравиразведки и магниторазведки применяет тот же критерий. Дело в том, что он является критерием максимального правдоподобия для случая некоррелированной помехи, распределенной по нормальному закону и имеющей нулевое математическое ожидание. На практике статистические свойства помехи, как правило, неизвестны, что в силу центральной предельной теоремы все равно заставляет прибегать к той же модели, а, следовательно, и к тому же критерию подбора. Если же статистические свойства помехи известны, то статистическое направление обеспечивает построение другого критерия, оптимально учитывающего эту информацию.

Очевидно, метод квазирешений не является всеобъемлющим - с его помощью можно решать лишь ограниченный круг задач. Ответ на вопрос, какие это задачи, дан В.К.Ивановым. Им доказана теорема, суть которой состоит в том, что если множество искомых моделей - компактно в R^n , то при стремлении невязки к нулю квазирешение стремится к точному решению p_T . Другими словами, если уменьшать помеху до нуля, то квазирешение, получаемое методом подбора на некотором множестве моделей, будет стремиться к точному решению лишь тогда, когда это множество компактно в R^n . Напомним, что множество $P \in R^n$ называется компактным в R^n , если из всякой последовательности его элементов можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу того же множества P . Множество P компактно в R^n тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено, то есть когда все параметры модели изменяются в конечных пределах. Это, вообще говоря, естественно для обратных задач гравиразведки и магниторазведки, что и объясняет причины популярности метода подбора.

Исторически первыми методами, используемыми подбор для решения обратных задач, были так называемые "методы характерных точек", которые, видимо, правильнее называть методами подбора по характерным точкам. Затем были развиты методы подбора с помощью альбомов теоретических кривых и палеток, дающих возможность учитывать при подборе все наблюдаемые значения. Подбор стал осуществляться не только по графикам исходных полей, но и по графикам различных преобразований этих полей, например по амплитудному спектру, по автокорреляционной функции и т. п. С развитием электронно-вычислительной техники

подбор все более автоматизировался и в настоящее время выполняется на компьютерах.

Практически задача нахождения приближенного квазирешения на компактном множестве в пространстве R^n заключается в нахождении минимума функции n переменных, каковыми являются искомые параметры. Вид минимизируемой функции $\Phi(p_1, p_2, \dots, p_n)$ определяется условием (8.6), которое в развернутом виде может быть записано следующим образом:

$$\Phi(p_1, p_2, \dots, p_n) = \sum_{k=1}^m [u_k - u_{mk}(p_1, p_2, \dots, p_n)]^2 = \min, \quad (8.7)$$

где u_k и u_{mk} - соответственно наблюдаемое поле и поле модели в k -ой точке наблюдения. В зависимости от характера решаемой задачи выделяют линейные, линеаризованные и нелинейные задачи подбора, особенностям решения которых будут посвящены следующие три параграфа.

§ 9. РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ПОДБОРА

Многие интерпретационные задачи гравиразведки и магниторазведки приводят к необходимости решения линейных задач подбора. Эти задачи отличаются тем, что оператор D решения прямой задачи в них фактически является прямоугольной матрицей A , имеющей m строк и n столбцов. Модель p и исходные данные u при этом понимаются как векторы-столбцы, имеющие соответственно n и m элементов.

Линейные задачи подбора наиболее часто встречаются, когда требуется найти физические свойства совокупности объектов заданной формы и местоположения. Например, при моделировании рудных месторождений по данным гравиразведки и магниторазведки встречаются ситуации, когда рассчитанное поле детально изученного участка не совпадает с наблюдаемым, причем характер различия полей указывает на возможность погрешностей в заданных значениях избыточной плотности или намагниченности. В этих случаях на некоторых эталонных участках или профилях приходится решать линейную задачу подбора, уточняя данные о физических свойствах.

Линейные задачи подбора являются важным элементом решения и нелинейных задач. Одна из возможных методик заключается в неформальном переборе вариантов геометрии объектов, совмещенном с решением для каждого из вариантов линейных задач относительно физических свойств и проверки получаемых результатов на непротиворечивость с априорной информацией. Еще шире применяется прием линеаризации, когда нелинейная задача сводится к решению последовательности линейных задач относительно поправок к предыдущему приближению.

Существует, наконец, достаточно общая задача определения физических свойств в кусочно-однородных сеточных моделях, сводящаяся к решению линейных задач подбора. Предположим, из априорной информации следует, что все источники аномального поля сосредоточены в некотором конечном объеме. В этом случае, разделяя формально этот объем на ряд тел простой формы, например, призм, можно свести решение обратной задачи к определению физических свойств этих тел, форма которых и положение в пространстве известны с абсолютной точностью. При решении этой задачи в общем случае встречаются определенные трудности, смысл которых рассмотрим ниже, но в ряде частных ситуаций, когда, тела разнесены по горизонтали, этот подход может давать положительные результаты. К примеру, в районах неглубокого залегания кристаллического фундамента с крутопадающими пластами горных пород этот подход, называемый иногда методом сеток, дает возможность значительного упрощения интерпретации.

Чрезвычайно важно отметить, что к линейным задачам подбора относятся задачи определения физических свойств пород по аномалиям, осложненным региональным фоном. Если параметризовать фон в виде полинома невысокой степени, то при решении обратной задачи можно найти одновременно и коэффициенты этого полинома, совместив разделение аномалий с их детальным количественным описанием.

Рассмотрим в качестве примера решение линейной задачи подбора по данным гравиразведки в следующей детерминистской постановке. Пусть известны значения гравитационной аномалии в m точках на поверхности Земли, при этом, вообще говоря, безразлично, является ли дневной рельеф плоским или имеет сложную форму. Аномалии будем считать осложненными линейным региональным фоном, описываемым функцией $ax+by+c$ с неизвестными коэффициентами a, b, c . На основании априорной информации выбраны n гравитирующих объектов известной формы, плотности которых требуется определить.

Поле интерпретационной модели в k -ой точке с координатами (x_k, y_k, z_k) может быть с учетом линейного регионального фона представлено в форме $u_m(x_k, y_k, z_k) = ax_k + by_k + c + \sigma_1 \Gamma_1(x_k, y_k, z_k) + \dots + \sigma_n \Gamma_n(x_k, y_k, z_k)$, где $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ - известные значения, характеризующие в k -ой точке гравитационные поля заданных объектов с единичными избыточными плотностями. Квазирешение данной задачи может быть найдено путем минимизации квадрата невязки, записанной в соответствии с (8.7) в виде

$$\Phi(a, b, c, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) = \sum_{k=1}^m \left[g(x_k, y_k, z_k) - ax_k - by_k - c - \sum_{i=1}^n \sigma_i \Gamma_i(x_k, y_k, z_k) \right]^2 = \min. \quad (9.1)$$

При этом в силу линейности оператора решения прямой задачи определение иско- мых параметров в вычислительном плане сводится к решению достаточно прорабо- танных проблем линейной алгебры.

Наиболее распространенной при решении линейных обратных задач является ситуация, когда число точек наблюдения превышает число искомых параметров, в результате чего задача сводится к устойчивому решению переопределенной систе- мы линейных алгебраических уравнений. Вместе с тем, иногда, когда интерпретаци- онная модель оказывается столь сложной, что для ее описания необходимо боль- шее число параметров, нежели число точек наблюдения, возникает потребность и в решении недоопределенных систем. Последняя ситуация приводит к так называе- мому способу псевдообращения, особенно широко применяемому при решении ли- неаризованных задач подбора.

Рассмотрим вначале типовой случай, когда число точек наблюдения больше числа определяемых параметров, в нашем примере $m > n + 3$. Тогда для минимизации можно воспользоваться необходимыми условиями экстремума функции многих пе- ременных, которые, как известно, заключаются в равенстве нулю частных произ- водных по всем переменным. Запишем эти условия, обозначив выражение в квад- ратных скобках формулы (9.1) как R :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial a} &= -2 \sum_{k=1}^m R x_k = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial b} &= -2 \sum_{k=1}^m R y_k = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial c} &= -2 \sum_{k=1}^m R = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_1} &= -2 \sum_{k=1}^m R \Gamma_1(x_k, y_k, z_k) = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_2} &= -2 \sum_{k=1}^m R \Gamma_2(x_k, y_k, z_k) = 0, \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_n} &= -2 \sum_{k=1}^m R \Gamma_n(x_k, y_k, z_k) = 0. \end{aligned} \tag{9.2}$$

Полученная система линейных алгебраических уравнений называется системой нормальных уравнений. Она может быть переписана более подробно, при этом для краткости опустим пределы суммирования по k , а также аргументы функций Γ и обо- значим $g_k = g(x_k, y_k, z_k)$:

К решению этой же системы фактически сводится решение линейной задачи подбора в рамках статистического направления. В случае некоррелированной помехи, распределенной по нормальному закону и имеющей нулевое математическое ожидание, метод максимального правдоподобия приводит к необходимости получения оптимального решения из системы (9.6). Матрицу коэффициентов системы нормальных уравнений $A^T A$, каждый элемент которой поделен на дисперсию помехи ε^2 , в рамках статистического направления принято называть информационной матрицей параметров или матрицей Фишера. Важнейшим достижением статистического подхода является априорная оценка качества интерпретации, проводимая путем построения ковариационной матрицы параметров \mathbf{B} , являющейся обратной к информационной матрице, то есть

$$\mathbf{B} = \varepsilon^2 (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}. \quad (9.7)$$

Ковариационная матрица \mathbf{B} является квадратной симметричной матрицей с элементами B_{ij} , причем i и j изменяются от 1 до n . Диагональные элементы ковариационной матрицы B_{ii} имеют смысл дисперсии оценки i -го параметра, а квадратный корень из B_{ii} соответственно характеризует среднюю квадратическую погрешность его оценки. Внедиагональные элементы ковариационной матрицы $B_{ij} = B_{ji}$, где $i \neq j$, характеризуют корреляционные связи между оценками i -го и j -го параметров. Они показывают, насколько устойчиво определяются данные параметры. Если их изменения влияют на аномальное поле почти одинаково, то они по этому полю будут определяться неустойчиво, так как изменение поля из-за вариации одного из параметров может компенсироваться вариацией второго. Для количественной оценки данного эффекта вводят нормированные корреляционные коэффициенты:

$$b_{ij} = \frac{B_{ij}}{\sqrt{B_{ii}} \sqrt{B_{jj}}}. \quad (9.8)$$

Если b_{ij} близок к нулю, то i -ый и j -ый параметры определяются совместно достаточно устойчиво. Если же модуль нормированных корреляционных коэффициентов близок к единице, то совместное определение данных параметров, основанное на выявлении различий их влияния на аномальное поле, становится затруднительным. Таким образом, ковариационная матрица параметров позволяет выяснить, какие из параметров определяются устойчиво, а какие неустойчиво, а также оценить предельно возможную точность оценки параметров. Вычисление элементов ковариационной матрицы с помощью обращения информационной матрицы Фишера может осуществляться любыми из известных способов, разработанных в линейной алгебре.

Чрезвычайно важной для понимания сущности метода подбора является упомянутая задача определения физических свойств в кусочно-однородных сеточных моделях. В ее решении наиболее ярко проявляется тот факт, что подбор аномального поля полем некоторой модели в общем случае вовсе не гарантирует, что полученное в результате распределение физических свойств является именно тем, которое создало данное поле. Рассмотрим пример, построенный А.И.Кобруновым. На рис. 17а показана аномалия силы тяжести двумерного тела с сечением в форме квадрата. Избыточная плотность тела составляет $0,6 \text{ г/см}^3$. Для определения формы тела попробуем применить метод сеток. Будем считать, что изучаемое тело заведомо расположено внутри показанного на том же рисунке контура. Разбивая данный контур на 25 и даже на 100 квадратных клеток и решая линейную задачу подбора для определения избыточных плотностей в каждой из них, мы, подбирая поле, тем не менее не получаем ожидаемого распределения плотностей. Нам кажется, что в тех клетках, где расположено реальное тело, мы должны получить избыточные плотности $0,6 \text{ г/см}^3$, а во внешних по отношению к телу клетках избыточная плотность должна быть равна нулю. На самом деле распределение избыточных плотностей внутри контура оказывается таким, как показано на рис. 17б, то есть абсолютно не совпадающим с реальным. Теоретическое объяснение этого факта дано А.И.Кобруновым, В.Н.Страховым, С.М.Оганесяном и А.С.Маргулисом. Они доказали, что минимум невязки для сеточных моделей достигается на проекциях гармонических функций на заданную сетку. Как известно, гармонические, то есть удовлетворяющие уравнению Лапласа, функции могут достигать своих максимальных и минимальных значений только на границе области своего определения. Именно это мы и видим на рис. 17б.

Рассмотренный пример показывает, что сеточная модель весьма близка к такому множеству, которое не является компактным в \mathbb{R}^n . В силу этого реальное решение, то есть распределение избыточной плотности масс внутри сетки $\sigma(x, z)$, оказывается представимым в виде суммы двух распределений:

$$\sigma(x, z) = \sigma_1(x, z) + \sigma_2(x, z). \quad (9.9)$$

Здесь $\sigma_1(x, z)$ - гармоническое распределение плотности внутри заданного контура: такое, что $\Delta\sigma_1(x, z) = 0$, а $\sigma_2(x, z)$ - распределение плотности, не создающее внешнего аномального поля. В результате решение линейной задачи подбора с минимальной невязкой оказывается гармоническим. Таким образом, при решении с помощью метода подбора обратных задач на априорно формируемых сложных и гибких модельных конструкциях надо весьма осторожно относиться к получаемым результатам. Может оказаться так, что минимум невязки достигается на геологически бессодержательных объектах. Это относится как к линейным, так и к

нелинейным задачам подбора. Преодолеть этот эффект можно лишь используя метод регуляризации.

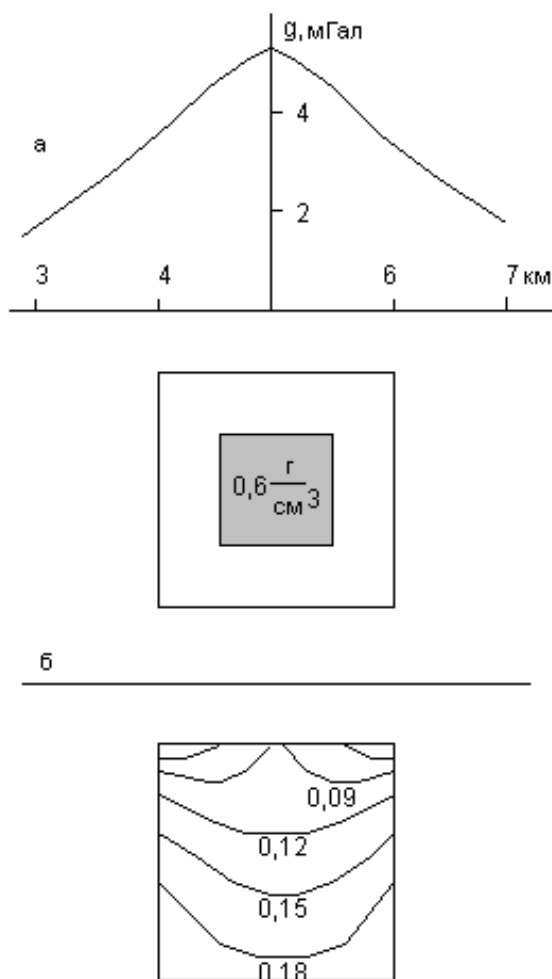


Рис. 17. Гармоническое решение в методе сеток (по А.И.Кобрунову):

а) гравитационное поле исходной модели и контур, в пределах которого ищется распределение избыточной плотности; б) изолинии избыточной плотности, полученной в результате решения линейной задачи подбора

Подводя итоги рассмотрения линейных задач подбора, отметим, что эти задачи имеют важное значение. Для их устойчивого решения необходимо, чтобы объекты, физические свойства которых определяются, не располагались друг над другом как в методе сеток, дабы не появлялась возможность компенсационных эффектов, результатом которых окажется бессмысленность получаемой модели. Число определяемых параметров должно быть менее числа точек, чтобы система нормальных уравнений получалась совместной. Случай, когда число точек наблюдения меньше числа определяемых параметров будет рассмотрен в следующем параграфе при изучении линеаризованных задач подбора, где он имеет большее значение.

§ 10. РЕШЕНИЕ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ ЗАДАЧ ПОДБОРА

Нелинейные задачи подбора являются наиболее распространенными. Необходимость в их решении возникает обычно тогда, когда требуется определить форму источника аномального поля из заданного компактного класса единственности. Особенность решения нелинейных задач подбора состоит в том, что их квазирешение трудно находить из системы нормальных уравнений так, как это делается при решении линейных задач. Дело в том, что нормальные уравнения, получаемые из необходимого условия экстремума функции многих переменных, обычно являются нелинейными и даже трансцендентными, а для решения таких систем нет столь же простых средств, как для систем линейных алгебраических уравнений. В связи с этим решение нелинейных задач обычно осуществляется путем построения минимизирующей последовательности моделей, то есть выбирается начальное приближение, которое затем модифицируется вплоть до получения минимума невязки. В настоящее время известно достаточно много способов построения минимизирующей последовательности, ряд из них будет рассмотрен в следующем параграфе. Здесь же мы разберем один из наиболее популярных подходов, сводящийся к линеаризации оператора решения прямой задачи и применению для построения минимизирующей последовательности развитого аппарата решения линейных задач.

Суть данного подхода состоит в сведении решения исходной нелинейной задачи к последовательному решению линейных задач определения поправок к предыдущему приближению. Пусть задано начальное приближение p_0 , и нам требуется найти поправку $\Delta p = p - p_0$ к нему, такую, чтобы невязка уравнения $Dp=u$ в точке p была бы меньше, нежели в точке p_0 . Если нас устраивает, что шаг продвижения к квазирешению будет маленьким, а количество таких шагов будет большим, мы иногда можем пренебречь нелинейностью и считать, что на каждом этапе решается линейная задача для этих поправок:

$$A\Delta p = u - Dp_0 \quad (10.1)$$

или

$$A\Delta p = \Delta u. \quad (10.2)$$

Оператор A представляет собой матрицу размерами $m \times n$, элементы которой фактически являются частными производными функции, описывающей поле начальной модели, в i -ой точке наблюдения по j -ому параметру. В большинстве обратных задач построение линеаризованного оператора A по точному D не представляет сложности. Более того, линеаризованный оператор зачастую может быть построен даже тогда, когда точный оператор невозможно представить в явном виде, например, когда он задается как результат решения интегрального уравнения. Наиболее

актуально это для задач магниторазведки сильномагнитных тел с учетом эффекта размагничивания.

Для решения системы (10.2) предложено большое число разнообразных методов. Если число точек наблюдения m больше числа искомых параметров n , ее можно решать способами, изложенными в предыдущем параграфе. Если же $m < n$, то получаемая система оказывается имеющей бесконечно много решений. В этом случае для отбора из множества решений требуемого квазирешения необходимо введение дополнительных условий. Наиболее естественным может считаться условие, заключающееся в требовании минимальной нормы искомого квазирешения в R^n . Действительно, если уж мы пошли на линеаризацию и на продвижение к квазирешению малыми шагами, то и надо потребовать, чтобы последующее приближение минимально отличалось от предыдущего. Введение такого условия приводит к методу решения линеаризованных задач, называемому методом Бэкуса-Гильберта. Дж.Бэкус и Ф.Гильберт предложили этот метод в 1967 году для решения обратных задач сейсмологии, позже он применялся для решения обратных задач в разных геофизических методах. Вместе с тем, анализ показывает, что метод Бэкуса-Гильберта фактически является частным случаем предложенного в 1920 году Е.Муром и независимо, но позже Р.Пенроузом так называемого метода псевдообращения. Именно метод псевдообращения является в настоящее время ведущим при решении линеаризованных задач подбора. Основой метода является построение псевдообратной матрицы.

Как известно, для квадратной и невырожденной матрицы A можно построить обратную матрицу A^{-1} . Если же A - прямоугольная матрица размеров $m \times n$ ($m \neq n$) или квадратная, но вырожденная, то она не имеет обратной, так что символ A^{-1} для нее не имеет смысла. Вместе с тем для нее можно построить псевдообратную матрицу A^+ , которая обладает некоторыми свойствами обратной матрицы. Более того, если матрица A квадратная и невырожденная, то ее псевдообратная матрица совпадает с обратной.

Рассмотрим следующее матричное уравнение:

$$AXA = A. \quad (10.3)$$

Если A - квадратная и невырожденная матрица, то это уравнение имеет единственное решение $X = A^{-1}$. Если же A - прямоугольная матрица размеров $m \times n$, то искомое решение X имеет размеры $n \times m$. Оно определяется неоднозначно, так как в общем случае (10.3) имеет бесконечное множество решений. Однако, среди них имеется лишь одно, отличающееся тем, что его строки и столбцы являются линейными комбинациями соответственно строк и столбцов транспонированной матрицы A^T . Это решение называется псевдообратной матрицей для A и обозначается A^+ . Отметим, что это определение дано для матриц с вещественными элементами. Если

же элементы являются комплексными числами, то в определении надо транспонированную матрицу заменить на сопряженную.

Важнейшим свойством псевдообратной матрицы является то, что она представляет собой наилучшее с точки зрения метода наименьших квадратов приближенное решение матричного уравнения

$$\mathbf{AX} = \mathbf{E}, \quad (10.4)$$

где \mathbf{E} - единичная матрица m -го порядка. Именно в силу этого свойства получаемое с помощью псевдообратной матрицы решение уравнения (10.2), а именно

$$\Delta p = \mathbf{A}^+ \Delta u, \quad (10.5)$$

имеет минимальную норму в пространстве \mathbb{R}^n .

Для построения псевдообратной матрицы можно воспользоваться так называемым скелетным разложением матрицы \mathbf{A} . Если матрица \mathbf{A} размеров $m \times n$ имеет ранг r , то она может быть представлена в виде произведения $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$, где \mathbf{B} - матрица размеров $m \times r$, а \mathbf{C} - соответственно матрица размеров $r \times n$, причем ранги этих матриц также равны r . Для этого в качестве столбцов \mathbf{B} достаточно, например, взять r линейно независимых столбцов исходной матрицы \mathbf{A} . Тогда коэффициенты линейных комбинаций, образующих столбцы матрицы \mathbf{A} из столбцов \mathbf{B} , будут являться столбцами матрицы \mathbf{C} . Поскольку \mathbf{B} и \mathbf{C} имеют максимально возможный ранг, то квадратные матрицы $\mathbf{B}^T \mathbf{B}$ и $\mathbf{C} \mathbf{C}^T$ являются невырожденными, и для них существуют обратные матрицы $(\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1}$ и $(\mathbf{C} \mathbf{C}^T)^{-1}$. Но тогда легко получить псевдообратные матрицы для \mathbf{B} и \mathbf{C} :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^+ &= (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T, \\ \mathbf{C}^+ &= \mathbf{C}^T (\mathbf{C} \mathbf{C}^T)^{-1}, \end{aligned} \quad (10.6)$$

после чего очевидно, что

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{C}^+ \mathbf{B}^+ = \mathbf{C}^T (\mathbf{C} \mathbf{C}^T)^{-1} (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T. \quad (10.7)$$

Чрезвычайно важно подчеркнуть, что несмотря на многовариантность разложений $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$, псевдообратная матрица \mathbf{A}^+ определяется формулой (10.7) однозначно.

Неоднозначность скелетного разложения $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$ заставляет искать среди возможных разложений наиболее эффективное, каковым оказывается так называемое сингулярное разложение. Известно, что все собственные числа симметричной матрицы вещественны, а из ее собственных векторов в евклидовом пространстве можно составить ортонормальный базис. Ортогональные матрицы в данном случае ценны тем, что обратные к ним совпадают с транспонированными, и это значительно упрощает построение псевдообратной матрицы.

Сингулярное разложение произвольной прямоугольной матрицы \mathbf{A} размеров $m \times n$ может быть записано в виде

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} \mathbf{\Sigma} \mathbf{C}^T, \quad (10.8)$$

где \mathbf{B} - ортогональная матрица размеров $m \times m$, \mathbf{C} - ортогональная матрица размеров $n \times n$, а матрица Σ размеров $m \times n$ является диагональной, причем первые r элементов ее главной диагонали (r - ранг матрицы \mathbf{A}) являются положительными сингулярными числами, а остальные равны нулю. Для нахождения матриц \mathbf{B} , \mathbf{C} и Σ необходимо решить следующую систему матричных уравнений:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{C} &= \mathbf{B}\Sigma, \\ \mathbf{A}^T\mathbf{B} &= \mathbf{B}\Sigma^T. \end{aligned} \quad (10.9)$$

Умножая обе части первого из этих уравнений слева на \mathbf{A}^T , а обе части второго уравнения слева на \mathbf{A} , получим

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{C} &= \mathbf{C}\Sigma^2, \\ \mathbf{A}\mathbf{A}^T\mathbf{B} &= \mathbf{B}\Sigma^2. \end{aligned} \quad (10.10)$$

Отсюда следует, что столбцы матрицы \mathbf{C} являются собственными векторами матрицы $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$, а столбцы матрицы \mathbf{B} - собственными векторами матрицы $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$. Сингулярные числа представляют собой квадратные корни из собственных чисел матриц $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$. Отметим, что ненулевые собственные значения этих матриц всегда совпадают. В связи с ортогональностью матриц \mathbf{B} и \mathbf{C} из (10.7) следует, что псевдообратная матрица может быть представлена в виде

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{C}\Sigma^{-1}\mathbf{B}^T, \quad (10.11)$$

причем диагональная матрица Σ^{-1} размеров $n \times m$ имеет в качестве первых r элементов главной диагонали числа, обратные к сингулярным.

Таким образом, для решения уравнения (10.2) необходимо получить сингулярное разложение матрицы \mathbf{A} , являющейся линейризованным оператором решения соответствующей прямой задачи, и, вычислив по формуле (10.11) псевдообратную матрицу \mathbf{A}^+ , найти поправку $\Delta\mathbf{p}$ к начальному приближению \mathbf{p}_0 по формуле

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{A}^+(\mathbf{u}_0 - \mathbf{D}\mathbf{p}_0), \quad (10.12)$$

причем полученная поправка $\Delta\mathbf{p}$ будет иметь минимальную норму в \mathbb{R}^n . При удачном выборе начального приближения через несколько шагов можно найти искомое квазирешение.

Сингулярное разложение дает возможность получения важной информации о решении, для чего анализируются сингулярные числа. Следует отметить, что сингулярное разложение обычно представляется в таком виде, что сингулярные числа располагаются по главной диагонали матрицы Σ в порядке убывания. Максимальное сингулярное число является квадратичной нормой матрицы \mathbf{A} :

$$\sigma_{\max}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_2, \quad (10.13)$$

оно показывает, насколько максимально может увеличиться норма произвольного вектора после умножения на него слева матрицы \mathbf{A} . Норму псевдообратной матрицы определяет, очевидно, минимальное сингулярное число матрицы \mathbf{A} . Отношение

максимального сингулярного числа к минимальному называют числом обусловленности матрицы **A**:

$$c(\mathbf{A}) = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}}. \quad (10.14)$$

Оно важно тем, что характеризует устойчивость решения к возмущениям правой части решаемого уравнения, то есть к помехам:

$$\frac{\|\Delta p\|}{\|p\|} \leq c(\mathbf{A}) \frac{\|\Delta u\|}{\|u\|}. \quad (10.15)$$

Если число обусловленности велико, то даже небольшая помеха в исходном поле может приводить к большому изменению решения, то есть к его неустойчивости.

Число обусловленности объясняет, почему нормальные уравнения метода наименьших квадратов $\mathbf{A}^T \mathbf{A} p = \mathbf{A}^T u$ так трудно решать. Дело в том, что число обусловленности $c(\mathbf{A}^T \mathbf{A})$, как следует из (10.10), является квадратом числа обусловленности $c(\mathbf{A})$. Таким образом, даже при $m > n$ для решения линейных и линеаризованных задач подбора гораздо лучше использовать сингулярное разложение исходной матрицы **A**, нежели формировать систему нормальных уравнений и решать ее методом Гаусса. Конечно, применение сингулярного разложения при этом не снимает проблем, связанных с неоднозначностью и с возможным получением гармонических решений. Возможность получения гармонических решений не исключена и при решении линеаризованных задач. Эта проблема еще ожидает своего конструктивного разрешения.

Анализ сингулярных чисел дает также возможность улучшения параметризации решаемой задачи. Если ранг r матрицы **A** оказывается меньшим, нежели число искомых параметров n , то часть из этих параметров оказывается связанной, так как они не могут быть найдены независимо от других. Это свидетельствует о неудачной параметризации и о необходимости ее корректировки. Иногда для введения новой параметризации пользуются линейными комбинациями исходных параметров, вводимыми формулой

$$p^* = C^T p. \quad (10.16)$$

Эти комбинации фактически представляют собой результаты весового осреднения исходных параметров, причем в качестве весов принимаются собственные векторы матрицы $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$. Вместе с тем, данный формальный подход не всегда эффективен. Целесообразнее заново параметризовать задачу, учитывая возможности определения каждого из параметров.

Применение сингулярного разложения дает возможность повышения устойчивости поиска квазирешения за счет "загрубления" псевдообратной матрицы. Дело в том, что малые собственные значения соответствуют наименее устойчиво опреде-

ляемым поправкам к искомым параметрам. Общая стратегия поиска линеаризованного решения подсказывает в этом случае для сохранения минимальных отличий от предыдущего приближения вообще отказаться от корректировки неустойчиво определяемых параметров. Для этого малые сингулярные числа округляются до нуля, в результате чего уменьшается ранг матрицы \mathbf{A} . Если рассмотреть числа обусловленности исходной и "загрубленной" матриц, можно убедиться, что число обусловленности "загрубленной" матрицы из-за отбрасывания минимальных сингулярных чисел уменьшилось, то есть данный прием действительно повышает устойчивость. На следующем этапе задача снова решается для всех параметров, но не исключено, что снова потребуются "загрублять" псевдообратную матрицу, хотя и за счет отказа от корректировки других параметров модели. В целом данный прием позволяет повысить устойчивость построения минимизирующей последовательности, уменьшить число требуемых итераций. В случае неудачной исходной параметризации указанный прием может помочь в выявлении неустойчиво определяемых параметров и изменении параметризации.

Таким образом, применение псевдообращения при решении линеаризованных задач подбора во многих случаях дает возможность достаточно удобно и эффективно находить искомое квазирешение.

§ 11. РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ПОДБОРА

Применение линеаризации при решении нелинейных задач подразумевает, как мы убедились, стратегию продвижения от начального приближения к искомому квазирешению небольшими шагами за большое число итераций, что далеко не всегда устраивает интерпретатора. В связи с этим большинство методов решения нелинейных задач направлено на уменьшение числа итераций за счет выбора иных стратегий построения минимизирующей последовательности. Рассмотрим сначала методы поиска квазирешения, не учитывающие возможных ограничений на параметры.

Основной идеей, заложенной в методы решения нелинейных задач, является сведение поиска минимума функции многих переменных к последовательному поиску минимума на прямых в \mathbb{R}^n , то есть к определению минимума функции одной переменной. Для этого необходимо определить направление прямой, задаваемое n -мерным вектором \mathbf{w} , и расстояние l , на которое мы должны переместиться в \mathbb{R}^n от точки начального приближения по направлению \mathbf{w} , чтобы найти минимум на данной прямой. Математически это можно выразить так: переход от k -го приближения p^k к $(k+1)$ -ому приближению p^{k+1} осуществляется по формуле:

$$p^{k+1} = p^k - l_k w^k. \quad (11.1)$$

Знак "минус" в формуле поставлен из-за того, что направление w обычно задается как направление возрастания минимизируемой функции. Для каждого из определяемых параметров p_1, p_2, \dots, p_n можно соответственно записать:

$$\begin{aligned} p_1^{k+1} &= p_1^k - l_k w_1^k, \\ p_1^{k+1} &= p_1^k - l_k w_1^k, \\ &\dots \dots \dots \\ p_1^{k+1} &= p_1^k - l_k w_1^k. \end{aligned} \quad (11.2)$$

Многочисленные методы поиска функций многих переменных включают в себя идентичные блоки. Фактически для описания алгоритма минимизации надо изложить следующие его элементы:

- 1) выбор направления поиска **(k+1)**-го приближения по **k**-ому;
- 2) определение расстояния от **k**-го приближения до **(k+1)**-го;
- 3) критерии прерывания построения минимизирующей последовательности.

Рассмотрим вначале методы определения направления поиска минимума, которые можно подразделить на три группы:

- a) методы, не использующие вычисления производных (иногда их называют прямыми методами);
- b) методы, использующие первые производные минимизируемой функции;
- c) методы, использующие первые и вторые производные минимизируемой функции.

Простейшим из методов, не использующих производных, является метод покоординатного спуска. Он заключается в том, что сначала функция минимизируется по параметру p_1 , причем другие переменные считаются фиксированными. Далее фиксируются все параметры, кроме p_2 , по которому минимизируется функция и т.д. После того, как минимизация по всем переменным завершена, можно повторить подобный цикл еще один или несколько раз.

Неоднократно предлагались различные усовершенствования этого метода. В частности, можно из исходной точки пытаться осуществить спуск во всех возможных направлениях координатных осей, выбирая в качестве следующего приближения то, где уменьшение невязки наибольшее. Метод покоординатного спуска обладает рядом существенных недостатков, в частности, может остановиться в точке, где минимизируемая функция имеет ребро, не совпадающее по направлению ни с одной из координатных осей. Вместе с тем, его простота постоянно привлекает к себе внимание геофизиков.

Среди методов, не использующих производных, в гравиразведке и магниторазведке для решения разнообразных задач наиболее широко применяется метод

Нелдера-Мида или, как его часто называют, метод деформируемого многогранника. Он заключается в следующем. Для обнаружения минимума в пространстве R^n вначале выбирают $n+1$ точку, расположенные так, чтобы они образовали в R^n небольшой по размерам многогранник, называемый симплексом. Точку, координаты которой в R^n являются средними арифметическими из соответствующих координат симплекса, называют центроидом. Решая для каждой из $n+1$ вершин симплекса прямую задачу и вычисляя невязку, выбирают ту из точек, где невязка максимальна. Прямая от центроида к этой точке характеризует направление максимального возрастания минимизируемой функции, следовательно, поиск следующего приближения надо вести от центроида в противоположном направлении. Найдя точку минимума на этой прямой, добавляют ее к симплексу и отбрасывают ту точку исходного симплекса, где невязка была максимальной. В результате снова остается симплекс из $n+1$ точек, причем только в единственной, вновь добавленной точке надо решать прямую задачу и вычислять невязку. Таким образом, последующие приближения рассчитываются примерно в $n+1$ раз быстрее, нежели первое.

Наиболее популярным среди методов, использующих расчет первых производных минимизируемой функции, является градиентный метод скорейшего спуска. В нем направление поиска выбирается как противоположное направлению вектора градиента минимизируемой функции в точке предыдущего приближения. Если обозначить градиент как вектор-столбец $\nabla\Phi(p^k)$, то есть

$$\nabla\Phi^T(p^k) = \left[\frac{\partial\Phi}{\partial p_1^k}, \frac{\partial\Phi}{\partial p_2^k}, \dots, \frac{\partial\Phi}{\partial p_n^k} \right], \quad (11.3)$$

то направление w^k определяется как

$$w^k = \frac{\nabla\Phi(p^k)}{\|\nabla\Phi(p^k)\|_{R^n}}. \quad (11.4)$$

Существует множество разновидностей этого метода, различающихся способами одномерной минимизации на каждом из шагов. Вместе с тем, все эти модификации для многих задач характеризуются довольно медленной сходимостью. Для ускорения сходимости, если это возможно, целесообразно использовать и вторые производные минимизируемой функции.

Классическим методом, использующим вторые производные минимизируемой функции, является метод Ньютона. Он базируется на обращении матрицы вторых производных, называемой матрицей Гессе или гессианом и обозначаемой как $\nabla^2\Phi(p)$. Матрица Гессе является симметричной матрицей n -го порядка, элементы которой представляют собой вторые производные минимизируемой функции по i -ому и j -ому параметрам:

$$\nabla^2\Phi(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2\Phi}{\partial p_1^2} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial p_1\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial^2\Phi}{\partial p_1\partial p_n} \\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial p_2\partial p_1} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial p_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2\Phi}{\partial p_2\partial p_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial p_n\partial p_1} & \frac{\partial^2\Phi}{\partial p_n\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial^2\Phi}{\partial p_n^2} \end{pmatrix}. \quad (11.5)$$

Идея метода Ньютона состоит в замене функции Φ в окрестности точки p^k ее квадратичной аппроксимацией:

$$Q(p) = \Phi(p^k) + \nabla\Phi^T(p^k)(p - p^k) + 0,5(p - p^k)^T \nabla^2\Phi(p^k)(p - p^k). \quad (11.6)$$

Тогда, если минимум Q существует, а это может быть лишь тогда, когда матрица Гессе является положительно определенной, то в качестве следующего приближения естественно выбрать именно точку минимума Q . В этой точке $\nabla Q(p^{k+1}) = 0$, что приводит к линейной системе

$$\nabla\Phi(p^k) = -\nabla^2\Phi(p^k)(p - p^k), \quad (11.7)$$

из которой получается итерационная формула, реализующая метод Ньютона:

$$p^{k+1} = p^k - \left[\nabla^2\Phi(p^k)\right]^{-1} \nabla\Phi(p^k). \quad (11.8)$$

Отметим, что здесь определены и направление, и шаг продвижения к следующему приближению. Метод Ньютона интересен тем, что, если минимизируемая функция является строго выпуклой и квадратичной, он позволяет найти квазирешение за одну итерацию.

Применение метода Ньютона к произвольным функциям не всегда удобно, поэтому его обычно модифицируют, вводя управляемый шаг перемещения l . С его учетом итерационная формула преобразуется к виду

$$p^{k+1} = p^k - l_k \left[\nabla^2\Phi(p^k)\right]^{-1} \nabla\Phi(p^k). \quad (11.9)$$

Шаг l_k можно, например выбирать так, чтобы он был не слишком велик, как это делается при решении линеаризованных задач. Можно также выбирать шаг путем одномерной минимизации функции Φ на прямой, направление которой задается формулой (11.9) и т.д.

Таким образом, существенным ограничением для применения метода Ньютона является требование положительной определенности матрицы Гессе. Естественная модификация метода состоит в аппроксимации матрицы, обратной к матрице Гессе, положительно определенной матрицей H_k , дающей направление перемещения, ис-

ходя из градиента $\nabla\Phi(p^k)$. Эта идея приводит к квазиньютоновским методам или методам переменной метрики, характеризующимся следующей итерационной формулой:

$$p^{k+1} = p^k - l_k H_k \nabla\Phi(p^k). \quad (11.10)$$

Матрица H_k , очевидно, на каждой итерации должна модифицироваться таким образом, чтобы для любой функции вида

$$Q(p) = 0,5p^T A p + b^T p + c. \quad (11.11)$$

с положительно определенной матрицей A , матрицы H_k сходились к обращению A^{-1} гессиана функции Q . В зависимости от способов модификации матрицы H_k на каждой из итераций различают довольно много методов переменной метрики. Наиболее мощным из них является метод Бройдена-Флетчера-Гольдфарба-Шанно или, как его кратко обозначают по первым буквам фамилий авторов, **BFGS**. Его особенностью является то, что в нем аппроксимируется сам гессиан, а не его обращение, что позволяет понизить требования к точности одномерной минимизации на каждой из итераций. Поскольку в методах переменной метрики гессиан фактически не вычисляется, а только аппроксимируется, модифицируясь от шага к шагу на основе информации о поведении первых производных, эти методы следует относить к группе, использующей лишь первые производные минимизируемой функции.

Алгоритм **BFGS** может быть сформулирован следующим образом. Вначале выбирается точка p^0 и произвольная положительно определенная матрица H_0 . В качестве таковой чаще выбирают единичную матрицу n -го порядка. На k -ой итерации сначала определяется направление поиска

$$w^k = -H_k \nabla\Phi(p^k), \quad (11.12)$$

после чего методами одномерного поиска определяется минимум на этой прямой - точка p^{k+1} . Далее корректируется матрица H_k , для чего вычисляются $\delta_k = p^{k+1} - p^k$, $\gamma_k = \nabla\Phi(p^{k+1}) - \nabla\Phi(p^k)$ и подставляются в следующую основную формулу:

$$H_{k+1} = H_k + \left[1 + \frac{\gamma_k^T H_k \gamma_k}{\delta_k^T \gamma_k} \right] \frac{\delta_k \delta_k^T}{\delta_k^T \gamma_k} - \frac{\delta_k \gamma_k^T H_k + H_k \gamma_k \delta_k^T}{\delta_k^T \gamma_k}. \quad (11.13)$$

После этого либо прерывается поиск минимума, либо итерация повторяется.

Мы рассмотрели наиболее распространенные алгоритмы определения направления поиска минимума и убедились, что во всех этих алгоритмах на каждой итерации требуется решение одномерной задачи, то есть определение расстояния l по выбранному направлению от p^k до p^{k+1} . Эта задача также может решаться разнообразными способами. Прежде, чем перейти к их рассмотрению, укажем общую формулировку одномерной задачи. Итак, мы выбрали направление w , в котором

должны продолжать поиск. Пусть w - это направление спуска. Тогда решение одномерной задачи сведется к определению числа $l \geq 0$, минимизирующего функцию $f(l) = \Phi(p^0 + lw)$.

Если функция $f(l)$ является дважды дифференцируемой, то для определения шага l можно применить итерационный метод Ньютона-Рафсона. В соответствии с ним производная $f'(l)$ в точке l_k , полученной на предыдущем этапе, аппроксимируется своей касательной, а точка l_{k+1} выбирается как пересечение этой прямой с осью абсцисс, то есть

$$l_{k+1} = l_k - \frac{f'(l_k)}{f''(l_k)}. \quad (11.14)$$

Если исходная функция f - квадратичная, то алгоритм, очевидно, сходится за одну итерацию. Недостатком метода является необходимость вычисления второй производной, что не всегда возможно. Вместе с тем, вторую производную можно аппроксимировать простейшей формулой:

$$f''(l_k) = \frac{f'(l_k) - f'(l_{k-1})}{l_k - l_{k-1}}, \quad (11.15)$$

подставляя которую в (11.14), получим

$$l_{k+1} = l_k - \frac{f'(l_k)(l_k - l_{k-1})}{f'(l_k) - f'(l_{k-1})}. \quad (11.16)$$

Эта формула реализует так называемый метод секущих или метод хорд.

Существуют методы одномерного поиска, вообще не использующие вычисления производных. Для их применения требуется знать отрезок прямой, в пределах которого расположен единственный минимум функции $f(l)$. Простейший из таких методов - метод дихотомии или деления отрезка пополам. Пусть минимум расположен на отрезке $[a, b]$. Решив прямую задачу для этих точек и вычислив в них невязки, мы ищем точку $l_1 = 0,5(a + b)$, а затем еще две точки: $l_2 = 0,5(a + l_1)$ и $l_3 = 0,5(l_1 + b)$, где проводим те же вычисления. В результате получим 5 точек, расположенных на отрезке через равные интервалы. Поскольку на отрезке функция $f(l)$ - унимодальна, то есть имеет один экстремум, всегда возможно отбросить два из четырех интервалов, на которые разбит исходный отрезок, и продолжать поиск на вдвое меньшем отрезке. При этом на его краях и в центре невязки уже определены. Далее подобные итерации повторяются. Если невязка вычисляется в K точках, длину отрезка, локализирующего минимум, можно сократить в $2^{0,5(K-3)}$ раз.

Стремление максимально сократить длину отрезка, локализирующего минимум, за K вычислений невязки приводит к так называемому методу Фибоначчи. В 1202 году Леонардо Пизанский, известный под псевдонимом Фибоначчи, впервые рас-

смотрел последовательность чисел F_k , названных позднее его именем. Она вводится следующими соотношениями: $F_1 = F_2 = 1$, $F_k = F_{k-2} + F_{k-1}$. Эта последовательность имеет чрезвычайно широкое применение в самых разнообразных областях, в том числе и в математическом программировании. Применение метода начинается с определения числа проб, за которые достигается заданная точность локализации минимума - ε . Для этого надо найти номер K минимального из чисел, удовлетворяющих неравенствам:

$$\frac{c}{F_{k+2}} \leq \varepsilon < \frac{c}{F_{k+1}},$$

$$F_{k+1} < \frac{c}{\varepsilon} \leq F_{k+2}, \quad (11.17)$$

где $c=b-a$ - длина первоначального отрезка. Определенное таким образом число проб K характеризует метод Фибоначчи K -го порядка. Поиск минимума на отрезке $[a,b]$ по этому методу начинается с выбора двух точек

$$l_1 = a + \frac{F_k}{F_{k+2}}(b - a),$$

$$l_2 = a + \frac{F_{k+1}}{F_{k+2}}(b - a) = a + b - l_1, \quad (11.18)$$

расположенных на отрезке $[a,b]$ симметрично, и вычисления $f(l_1)$ и $f(l_2)$. Если $f(l_1) \leq f(l_2)$, то для дальнейшего поиска полагаем:

$$a^* = a; b^* = l_2; l_2^* = l_1; l_1^* = a^* + b^* - l_2^* = a + l_2 - l_1 \quad (11.19)$$

и вычисляем $f(l_1^*)$. Если же $f(l_1) > f(l_2)$, полагаем:

$$a^* = l_1; b^* = b; l_1^* = l_2; l_2^* = a^* + b^* - l_1^* = l_1 + b - l_2 \quad (11.20)$$

и вычисляем $f(l_2^*)$. Структура последовательности чисел Фибоначчи такова, что на K -ом этапе точки l_1 и l_2 совпадут. Это и будет искомая точка минимума, причем можно доказать, что не существует другой стратегии одномерного поиска, позволяющей найти эту точку за K проб с большей точностью.

Изложенные методы одномерного поиска ориентированы на достаточно детальную локализацию точки минимума на прямой. Вместе с тем, такие алгоритмы, как **BFGS** или градиентный метод скорейшего спуска могут работать с приближенными, но зато быстродействующими методами одномерного поиска. Для таких методов должны соблюдаться следующие условия выбора шага l :

1) шаг не должен выбираться чересчур большим, иначе невязка станет уменьшаться от шага к шагу немонотонно, то есть алгоритм начнет осциллировать;

2) шаг не должен выбираться слишком малым, иначе алгоритм будет сходиться слишком медленно.

Предложено довольно много таких, как их называют экономичных методов. Рассмотрим в качестве примера метод Голдстейна.

Для проверки первого из указанных условий в методе Голдстейна вводится соотношение

$$f(l) \leq f(0) + m_1 l f'(0), \quad (11.21)$$

где $0 < m_1 < 1$ - эмпирический коэффициент, который часто полагают равным 0,1.

Второе условие обеспечивается соотношением

$$f(l) \geq f(0) + m_2 l f'(0), \quad (11.22)$$

где $m_1 < m_2 < 1$ - также эмпирический коэффициент, определяющий точность локализации минимума. Вначале полагают $l_{\min} = 0$, $l_{\max} = +\infty$, определяют многомерный градиент минимизируемой функции и проектируют его на направление поиска, то есть вычисляют $\mathbf{f}'(\mathbf{0})$. Зная эту величину, находят любым способом первую тестируемую точку \mathbf{l} и вычисляют $\mathbf{f}(\mathbf{l})$. Если оно не удовлетворяет условию (11.21), то полагают $l_{\max} = l$ и переходят к новой итерации. Если условие (11.21) выполняется, то проверяют условие (11.22). Если и оно выполняется, то поиск прерывается, иначе полагают $l_{\min} = l$ и переходят к новой итерации. При использовании методов переменной метрики алгоритм Голдстейна и ему подобные зачастую сходятся в окрестности минимума невязки в R^n всего за одну итерацию, благодаря чему их и называют экономичными.

Последним элементом описания методов решения нелинейных задач подбора является критерий прерывания построения минимизирующей последовательности. Оказывается, естественного критерия, по которому процесс минимизации должен прерываться, когда навязка станет меньше наперед заданной величины, характеризующей точность подбора, недостаточно. Дело в том, что функция $\Phi(\mathbf{p})$ в R^n обычно является полимодальной, то есть имеет несколько точек минимума. Квазирешение дает наиболее глубокий, так называемый глобальный минимум. В отличие от него другие минимумы называют локальными. Многие методы минимизации, такие, например, как градиентный метод скорейшего спуска, обнаруживают именно такие локальные минимумы, ближайшие к заданной точке начального приближения. В локальных минимумах невязка может оказаться больше, чем задано для прерывания подбора указанным критерием, поэтому при использовании только этого критерия процесс подбора может стать бесконечным. Необходимо распознавать такие ситуации, для чего обычно вводят еще один критерий прерывания процесса минимизации. В соответствии с ним, минимизация прерывается, если относительное уменьшение невязки за одну итерацию не превышает заданной величины, как правило 1% или

2%. Совокупность этих двух критериев дает возможности прерывания минимизации и, если сработал второй критерий, установления факта попадания в локальный минимум. Существуют формальные методы минимизации полимодальных функций, такие как метод оврагов и т. п., но их применение далеко не всегда эффективно, поскольку интерпретатор никогда заранее не знает свойств минимизируемых функций. Наиболее распространенным и по сути самым правильным способом выхода из локального минимума является выбор новой точки начального приближения.

Таким образом, необходимо подчеркнуть, что эффективность решения нелинейных задач подбора во многом определяется правильностью выбора начального приближения или стартовой интерпретационной модели. Именно в силу этого факта, к выбору стартовой модели надо подходить исключительно ответственно, базируясь на результатах определения тех параметров, которые находятся по аномальному полю единственным образом без привлечения дополнительной, априорной информации, другими словами, моментов и особых точек.

В качестве примера практической методики подбора рассмотрим наиболее распространенный способ определения формы двумерных объектов по их гравитационным аномалиям в отсутствие регионального фона, предложенный Е.Г.Булахом. В его основу положена аппроксимация гравитирующих объектов набором прямых уступов. Эта аппроксимация удобна тем, что с ее помощью можно подбирать и замкнутые тела, и контактные поверхности, и их совокупности. Весьма эффективна она также при исследовании разрезов с контактирующими телами. Универсальность данной методики обеспечила ей широкое применение при решении самых разнообразных геологических задач. Аналоги этой методики существуют и для интерпретации магнитных аномалий.

При рассмотрении способа Е.Г.Булаха будем ось **Oz** направлять вниз, а ось **Ox** - вправо. Каждый из уступов характеризуется четырьмя параметрами (рис. 18): глубиной верхней кромки **z=h**, глубиной нижней кромки **z=H**, координатой боковой кромки **x=d** и избыточной плотностью, вычисляемой как разность плотностей пород справа и слева от уступа: $\sigma = \sigma_{\text{пр}} - \sigma_{\text{лев}}$.

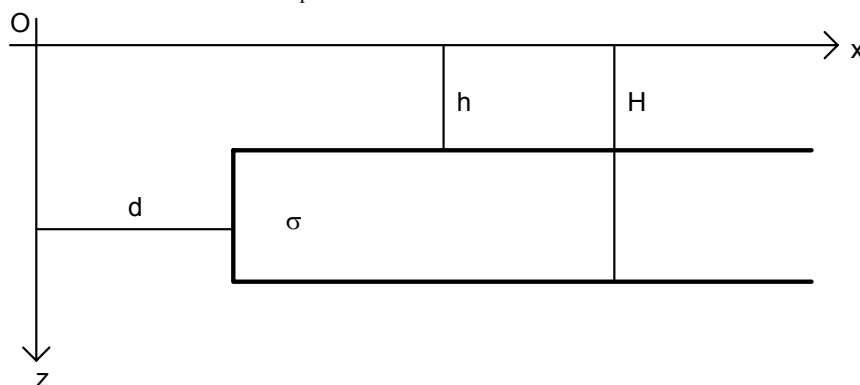


Рис. 18. Параметры прямого уступа

Е.Г.Булах предложил изменять в процессе подбора лишь параметры \mathbf{d} , сохраняя другие неизменными. Другими словами, подбор осуществляется путем перемещения уступов по горизонтали. В результате общее число определяемых параметров оказывается равным числу уступов в модели.

Примем дневную поверхность плоской, тогда в каждой из точек наблюдения x_k ускорение силы тяжести от модели из n уступов можно представить так:

$$g_m(x_k) = f \sum_{i=1}^n \sigma_i \left[\pi (H_i - h_i) + 2H_i \operatorname{arctg} \frac{x_k - d_i}{H_i} - 2h_i \operatorname{arctg} \frac{x_k - d_i}{h_i} + (x_k - d_i) \ln \frac{H_i^2 + (x_k - d_i)^2}{h_i^2 + (x_k - d_i)^2} \right]. \quad (11.23)$$

В соответствии с формулой (8.7) неизвестные значения координат боковых кромок уступов можно найти из условия

$$\Phi(d_1, d_2, \dots, d_n) = \sum_{k=1}^m [g(x_k) - g_m(x_k)]^2 = \min, \quad (11.24)$$

где m - число точек наблюдения, которое должно быть больше числа определяемых параметров n . Для нахождения неизвестных Е.Г.Булах предложил использовать градиентный метод скорейшего спуска.

В соответствии с вышеизложенным, для проведения подбора необходимо вначале задать начальную модель p_0 со стартовыми параметрами $d_1^0, d_2^0, \dots, d_n^0$. Продифференцируем выражение (11.24) по d_i с учетом (11.23) и получим в результате следующее явное выражение для i -ой компоненты градиента:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial d_i} = 2f\sigma_i \sum_{k=1}^m \left\{ [g(x_k) - g_m(x_k)] \ln \frac{H_i^2 + (x_k - d_i)^2}{h_i^2 + (x_k - d_i)^2} \right\}. \quad (11.25)$$

Тогда параметры следующей в минимизирующей последовательности модели p_1 должны определяться по формуле

$$d_i^1 = d_i^0 - \lambda \frac{\partial \Phi(p_0)}{\partial d_i} \quad (11.26)$$

при $i=1, 2, \dots, n$. Параметр λ характеризует координату точки на прямой, проходящей через вектор градиента. В процессе поиска на этой прямой точки с минимальной невязкой используется метод касательных, то есть приближенное значение λ_{np} вычисляется по формуле

$$\lambda_{np} = \frac{\Phi(p_0)}{\sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial \Phi(p_0)}{\partial d_i} \right]^2}. \quad (11.27)$$

Вместе с тем, если именно это значение подставить в (11.26) и продолжать подбор, сходимость минимизирующей последовательности из-за приближенности λ может оказаться немонотонной: невязка может в течение нескольких итераций возрастать и лишь затем уменьшится. Этот крайне нежелательный эффект можно в значительной степени подавить за счет более точного определения λ , для чего Е.Г.Булах предложил следующий прием. Он предположил на основании экспериментальных данных, что минимизируемая функция Φ на этой прямой имеет форму, близкую к параболической, что позволяет представить ее в виде

$$\Phi(\lambda) = a\lambda^2 + b\lambda + c. \quad (11.28)$$

Для нахождения коэффициентов параболы надо знать невязку в трех точках на этой прямой, причем в двух точках: при $\lambda = 0$ и при $\lambda = \lambda_{\text{пр}}$ она уже известна. В качестве третьей точки можно принять $\lambda = 2\lambda_{\text{пр}}$, тогда получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} c &= \Phi(0), \\ a\lambda_{\text{пр}}^2 + b\lambda_{\text{пр}} + c &= \Phi(\lambda_{\text{пр}}), \\ 4a\lambda_{\text{пр}}^2 + 2b\lambda_{\text{пр}} + c &= \Phi(2\lambda_{\text{пр}}), \end{aligned} \quad (11.29)$$

решив которую найдем искомые коэффициенты. Чтобы отыскать точку, где невязка минимальна, надо продифференцировать (11.28) и приравнять производную нулю, в результате чего оптимальный параметр $\lambda_{\text{опт}}$ окажется равным

$$\lambda_{\text{опт}} = -\frac{b}{2a}. \quad (11.30)$$

Подставляя значения a и b , найденные при решении системы (11.29), окончательно получаем

$$\lambda_{\text{опт}} = \frac{4\Phi(\lambda_{\text{пр}}) - \Phi(2\lambda_{\text{пр}}) - 3\Phi(0)}{2[2\Phi(\lambda_{\text{пр}}) - \Phi(2\lambda_{\text{пр}}) - \Phi(0)]} \lambda_{\text{пр}}. \quad (11.31)$$

Приведенные формулы описывают алгоритм поиска следующей в минимизирующей последовательности модели. Этот поиск повторяется до тех пор, пока либо невязка станет меньше заданной, либо уменьшение невязки за один шаг станет меньше порогового.

Если на основании априорной информации известна часть изучаемого разреза, некоторые из уступов можно закрепить и, проведя геологическое редуцирование, вычестить их влияние из наблюдаемого поля, что позволяет подбирать лишь неизвестные детали интерпретационной модели.

На рис. 19 приведен пример практического применения способа Е.Г.Булаха для определения формы соляного купола. В процессе интерпретации часть плотностных границ была закреплена по данным сейсморазведки, а часть подбиралась, что

позволило построить разрез, удовлетворяющий и сейсмическим и гравиметрическим данным.

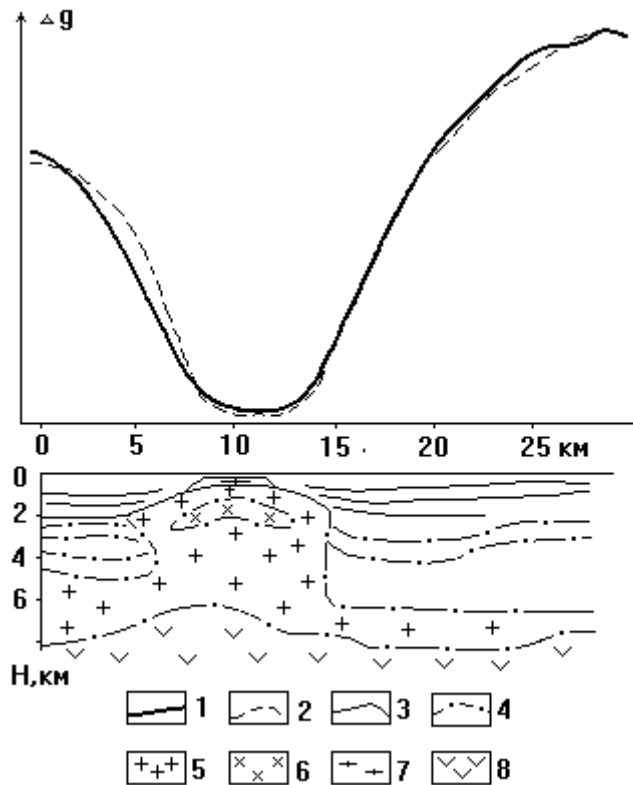


Рис. 19. Геологический разрез соляного купола Сартсай, построенный с помощью подбора (по Е.Г.Булаху и др.):

1 - интерпретируемая аномалия силы тяжести; 2 - подобранная аномалия силы тяжести; 3 - плотностные границы, закрепленные по данным сейсморазведки; 4 - подобранные плотностные границы; 5 - отложения соленосного комплекса; 6 - плотные включения; 7 - кепрок; 8 - отложения подсолевой толщи

Одним из естественных путей повышения устойчивости решения обратных задач является введение ограничений на искомые параметры, исходя из количественных априорных сведений о них. Ранее рассмотренные методы относились к безусловно-экстремальным задачам, теперь мы перейдем к изучению условно-экстремальных задач или задач на поиск минимума с ограничениями, условиями.

При решении обратных задач гравиразведки и магниторазведки используют ограничения трех типов. Первый тип - ограничения в виде равенств. Они часто возникают, когда требуется введение сложных моделей с контактирующими телами. Если такие тела аппроксимировать многогранниками, то требование отсутствия пересечений между ними математически может быть сформулировано как совокупность равенств между некоторыми параметрами или их комбинациями. Например, у смежных многогранников могут совпадать грани, ребра или вершины. Второй тип -

ограничения в виде неравенств. Довольно часто априорная информация включает сведения о возможных интервалах изменения искомым параметров: как физических свойств, так и геометрических характеристик. Наконец, третий тип - это ограничения в виде экстремумов функций от параметров. Условия этого типа обычно описывают качественную априорную информацию о решении и будут рассмотрены в следующем параграфе, так как они составляют базу метода регуляризации. Здесь мы ограничимся рассмотрением условий двух первых типов, которые в общем виде могут быть записаны как совокупность нестрогих неравенств:

$$q_i(p) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, t. \quad (11.32)$$

Одним из наиболее простых, но в то же время весьма эффективных методов учета ограничений является метод замены переменных, который дает возможность сведения условно-экстремальных задач к безусловно-экстремальным. Так, во множестве обратных задач гравиразведки и магниторазведки встречаются двусторонние ограничения на параметры, то есть параметры моделей считают принадлежащими некоторым отрезкам:

$$a_k \leq p \leq b_k, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (11.33)$$

Для учета таких ограничений каждый из параметров p_k можно, например, с помощью преобразования

$$p_k = a_k + (b_k - a_k) \sin^2 p_k^* \quad (11.34)$$

заменить на неограниченно изменяющийся параметр p_k^* . Определение этих модифицированных параметров можно вести методами, рассмотренными в предыдущих параграфах.

Если ограничения заданы в виде равенств, метод замены переменных также позволяет иногда свести условно-экстремальную задачу к безусловно-экстремальной. Такой прием особенно эффективен, когда все функции $q_i(p)$ являются линейными. Тогда, выражая одни переменные через другие, можно не только осуществить требуемое сведение, но и понизить размерность решаемой задачи, поскольку часть из параметров оказывается линейной комбинацией других параметров.

Вообще говоря, введение ограничений означает, что поиск минимума функции Φ надо вести не во всем пространстве R^n , а только в его части, границы которой определяются заданными условиями. В связи с этим большинство предложенных методов решения задач подбора с ограничениями фактически представляет собой модификации методов, рассчитанных на решение безусловно-экстремальных задач. Для этого ищут возможное направление спуска, то есть направление, в котором функция Φ строго убывает, но проверяют, что малое перемещение в этом направлении не выводит за границы области, задаваемой ограничениями. Рассмотрим в качестве примера метод проекционного градиента, наиболее эффективный в случае

линейных ограничений на параметры. Отметим, что на практике ограничения на параметры в значительном большинстве оказываются именно линейными: как в виде равенств, так и в виде неравенств.

Пусть задача состоит в том, чтобы найти минимум функции Φ при условиях

$$\begin{aligned} a_k p &\leq b_k, \quad k = 1, 2, \dots, t_1, \\ a_k p &= b_k, \quad k = 1, 2, \dots, t_2. \end{aligned} \quad (11.35)$$

Найдем направление перемещения w , которое позволяет максимально возможно уменьшить $\Phi(p)$, а значит делает $\nabla\Phi^T(p)w$ минимальным, но которое, по крайней мере для малых шагов, дает возможность оставаться в области, задаваемой ограничениями. В точке решения условия в виде равенств требуют выполнения соотношения $a_k w = 0$, $k = 1, 2, \dots, r$ или в векторной форме

$$Aw = 0. \quad (11.36)$$

Тогда можно доказать, что если A^0 - матрица размерами $r \times n$ ранга $r \leq n$, состоящая из строк матрицы A , удовлетворяющих условия типа равенств, то оптимальное решение задачи

$$\nabla\Phi^T(p)w = \min; \quad A^0 w = 0; \quad \|w\| = 1, \quad (11.37)$$

есть $w = y / \|y\|$, где y - проекция вектора $-\nabla\Phi(p)$ на область, задаваемую условиями. Она вычисляется по формуле $y = -P^0 \nabla\Phi(p)$, а матрица P^0 называется матрицей проектирования и может быть представлена в виде:

$$P^0 = I - A^{0T} [A^0 A^{0T}]^{-1} A^0. \quad (11.38)$$

В соответствии с этим, алгоритм проекционного градиента сводится к следующему. Пусть на k -ой итерации мы находимся в точке p^k . Вначале определим множество ограничений типа равенств для этой точки и выберем из матрицы A все строки, содержащие эти ограничения. По сравнению с предыдущей итерацией число r таких строк, то есть число условий, которые мы пытаемся удовлетворить, может увеличиться лишь на единицу. Пусть A^0 - матрица, строки которой отвечают этим ограничениям, тогда можно вычислить матрицу проектирования по формуле (11.38) и определить $y^k = -P^0 \nabla\Phi(p^k)$. Затем, если $y^k \neq 0$, осуществляется максимально возможный спуск по этому направлению, удовлетворяющий всем ограничениям, после чего итерации повторяются. Минимальность различий между матрицами проектирования на k -ой и $(k+1)$ -ой итерациях дают возможность сократить объем вычислений за счет корректировки предыдущей матрицы и делают этот метод достаточно экономичным.

Таким образом, учет ограничений, которые для обратных задач гравиразведки и магниторазведки носят преимущественно линейный характер, сравнительно не-

сложен и может быть в большинстве случаев решен путем замены переменных и сведения условно-экстремальной задачи к задаче без ограничений. В тех же случаях, когда такой прием затруднителен, можно воспользоваться одной из модификаций методов возможных направлений, приспособленных для работы с ограничениями. С подробным изложением таких методов можно познакомиться в многочисленных книгах, посвященных математическому программированию. Для устойчивого решения обратных задач гораздо важнее учесть качественную априорную информацию о решении, которая приводит к методу регуляризации.

§ 12. ОСНОВЫ МЕТОДА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

Рассмотренные в предыдущих параграфах модификации метода подбора применимы для получения квазирешения исключительно в тех случаях, когда множество возможных решений \mathbf{P} является компактным в пространстве \mathbb{R}^n . Однако, для ряда важных с практической точки зрения обратных задач множество возможных решений может и не быть компактным.

Вообще говоря, метод подбора дает достаточно хорошие результаты лишь тогда, когда число определяемых параметров небольшое, а сами они не коррелируют друг с другом, чтобы не проявлялись компенсационные эффекты, подобные рассмотренному для метода сеток. Тогда, когда число искомых параметров велико, а интерпретационная модель становится достаточно гибкой, чтобы подбирать не только ту часть аномального поля, которая представляет интерес, но и помеху, метод подбора начинает давать неестественные результаты. Требование минимизации невязки приводит к тому, что точность подбора достигается за счет сильных искажений модели. Например, если гравитационную аномалию от шара, осложненную случайной помехой, подбирать не в классе шаров, а в классе контактных поверхностей, то в принципе можно достичь полного совпадения наблюдаемого поля с полем модели, но полученная в итоге контактная поверхность окажется настолько изломанной, что геологическое истолкование результата окажется бессмысленным.

Таким образом, имеется достаточно широкий класс практически важных задач, для которых множество возможных решений \mathbf{P} не является компактным в \mathbb{R}^n , к тому же помехи в наблюдаемом поле выводят точку \mathbf{u}_n , характеризующую его, за пределы множества \mathbf{DP} в пространстве \mathbb{R}^m (рис. 16). Такие задачи называют существенно некорректными, и для них метод подбора не применим. В 1963 году А.Н.Тихонов предложил для их решения метод регуляризации, в основу которого положено понятие регуляризирующего оператора.

В § 8 мы уже отмечали, что решение операторного уравнения $\mathbf{Dp}=\mathbf{u}$, у которого вместо точного значения правой части \mathbf{u}_T известно лишь приближенное, может и не

существовать в классическом смысле. Пусть вместо u_T известно такое приближенное значение u_δ , для которого

$$\|u_T - u_\delta\|_{R^m} \leq \delta. \quad (12.1)$$

Числовой параметр δ характеризует погрешность правой части уравнения, поэтому представляется целесообразным находить приближенное решение p_δ с помощью такого оператора, зависящего от параметра, значения которого согласуются с погрешностью δ . Другими словами, естественно потребовать, чтобы та часть поля, которая связана с изучаемым геологическим объектом, передавалась полем модели, а помеха при этом игнорировалась. При $\delta \rightarrow 0$, то есть при стремлении u_δ к u_T по норме пространства R^m , приближенное решение p_δ должно стремиться к истинному точному решению p_T по норме пространства R^n .

Хотя понятие регуляризирующего оператора сформулировано А.Н.Тихоновым для любых метрических пространств, мы далее, как и во всей главе, будем рассматривать лишь конечномерные евклидовы пространства, наиболее важные с точки зрения практики интерпретации гравитационных и магнитных аномалий.

Оператор $R(u, \alpha)$, зависящий от параметра α , называется регуляризирующим для операторного уравнения $Dp = u$, если он обладает следующими свойствами:

- 1) оператор определен для всякого $\alpha > 0$ и любого u из пространства R^m ;
- 2) Если $Dp_T = u_T$, то существует такое $\alpha(\delta)$, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon)$, что если

$$\|u_T - u_\delta\|_{R^m} \leq \delta(\varepsilon), \quad (12.2)$$

то

$$\|p_T - p_\alpha\|_{R^n} \leq \varepsilon, \quad (12.3)$$

где

$$p_\alpha = R(u_\delta, \alpha) \quad (12.4)$$

и $\alpha = \alpha(\delta)$.

Решение, получаемое по формуле (12.4), при α , согласованном с погрешностью определения аномального поля δ , называется регуляризованным решением обратной задачи, а числовой параметр α - параметром регуляризации. Фактически регуляризованное решение является искомым приближенным решением обратной задачи.

Таким образом, по А.Н.Тихонову приближенное решение обратной задачи, устойчивое к помехам в наблюдаемых полях, сводится к следующим двум этапам:

- a) к построению регуляризирующего оператора;
- b) к определению параметра регуляризации по априорной информации.

Этот метод построения приближенных решений и носит название метода регуляризации.

Построение регуляризирующего оператора возможно при наличии качественной априорной информации о решении. Например, можно потребовать, чтобы искомое решение оказывалось гладким или, как в методе Бэкуса-Гильберта, наименее уклоняющимся от начальной модели и т. п. Эту информацию можно сформулировать в виде вариационного принципа отбора возможных решений обратной задачи. Для этого надо составить функцию $\Omega[p]$, называемую стабилизатором, которая должна обладать следующими свойствами:

1) элемент p_T , представляющий точное решение обратной задачи, должен принадлежать области его определения P_1 , являющейся подмножеством множества допустимых моделей P , всюду плотным в P ;

2) для всякого числа $d > 0$ подмножество P_d элементов $p \in P_1$, для которых $\Omega[p] \leq d$, является компактным в P .

Выбор стабилизатора неоднозначен и определяется характером решаемой задачи. Например, если решение получается негладким, надо его регуляризовать, минимизируя стабилизатор, характеризующий меру негладкости. Фактически стабилизатор является штрафом, который интерпретатор накладывает на решение за его нежелательные свойства, в том числе негладкость и т.п. Эти нежелательные свойства обычно проявляются в процессе численных экспериментов по решению обратных задач для известных моделей, либо при попытке решить конкретную обратную задачу методом подбора. После их выявления и выбора необходимого стабилизатора получение устойчивого решения сводится к решению следующей условно-экстремальной задачи: найти элемент p_δ , минимизирующий стабилизатор при условии, что невязка не превышает заданной величины δ , характеризующей норму помехи. Математически это выглядит так:

$$\Omega[p] = \min, \quad \left\| u - u_\delta \right\|_{R^m} \leq \delta. \quad (12.5)$$

Найденную модель p_δ можно рассматривать как результат применения регуляризирующего оператора.

Для решения условно-экстремальных задач в вариационном исчислении разработан специальный метод, называемый методом неопределенных множителей Лагранжа. Он позволяет свести условно-экстремальную задачу с ограничением в форме равенства к безусловной-экстремальной. Поясним его применение на простом примере, при этом отметим, что максимумы и минимумы функций ищутся однотипно. Действительно, в точке, где $f(x)$ имеет минимум, $-f(x)$ будет иметь максимум.

Пусть требуется найти стороны прямоугольника максимальной площади, вписанного в окружность с уравнением $x^2 + y^2 = r^2$. Поскольку площадь прямоугольника можно представить в виде $4xy$, задача сводится к нахождению максимума функции

$$f(x,y) = 4xy \quad (12.6)$$

при условии

$$\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0. \quad (12.7)$$

В этом примере, конечно, можно выразить y через x и подставить в максимизируемую функцию, однако, для реальных задач это зачастую невозможно или затруднительно. Тогда составляют функцию

$$F(x,y) = \varphi(x,y) + \alpha f(x,y), \quad (12.8)$$

где α - неопределенный множитель, и находят искомые параметры из необходимых условий экстремума F , то есть из системы уравнений Эйлера, и условия $\varphi(x,y)=0$. В нашем примере

$$\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0. \quad (12.9)$$

Дифференцируя эту функцию по x и по y и приравнивая производные нулю, получаем совместно с (12.7) систему

$$\begin{aligned} 2x + 4\alpha y &= 0, \\ 2y + 4\alpha x &= 0, \\ x^2 + y^2 - r^2 &= 0, \end{aligned} \quad (12.10)$$

откуда следует, что искомый максимум дает квадрат, то есть $\alpha = -0,5$ и $x = y = r / \sqrt{2}$.

А.Н.Тихонов доказал, что если метод Лагранжа реализуем для решения исходной условно-экстремальной задачи (12.5), то есть существует такой неопределенный множитель α , при котором

$$\|Dp - u_\delta\|_{R^m} = \delta, \quad (12.11)$$

то задача (12.5) оказывается эквивалентной безусловной экстремальной задаче поиска минимума следующей функции, которую называют функцией Тихонова:

$$M^\alpha[u_\delta, p] = \|Dp - u_\delta\|_{R^m}^2 + \alpha \Omega[p]. \quad (12.12)$$

Неопределенный множитель α здесь является параметром регуляризации. Таким образом, метод регуляризации сводится к решению задачи

$$\|Dp - u_\delta\|_{R^m}^2 + \alpha \Omega[p] = \min \quad (12.13)$$

и оценке α , согласуемого с погрешностью исходных данных.

Рассмотрим качественно влияние α на результаты минимизации. Если $\alpha = 0$, то чему бы ни был равен стабилизатор, он не оказывает никакого влияния на решение обратной задачи. Подставив это значение в (12.13), мы убеждаемся, что все будет

определяться лишь точностью совпадения наблюдаемого поля с полем модели, то есть при $\alpha=0$ результаты метода регуляризации полностью совпадут с результатами метода подбора. Можно сказать, что метод подбора есть частный случай метода регуляризации, когда параметр регуляризации - нулевой.

Пусть теперь α достаточно велико - тогда минимизация функции Тихонова будет определяться лишь минимизацией стабилизатора. Поскольку $\Omega[p]$ является своеобразным штрафом, налагаемым на решение за его нежелательные свойства, то метод регуляризации будет при этом давать результаты, полностью удовлетворяющие критерию качества, но игнорирующие наблюдаемое поле. Например, если решается обратная задача гравиразведки для контактной поверхности, результаты при большом α будут представлять собой горизонтальную прямую, каким бы ни было аномальное поле.

Из изложенного следует, что надо подбирать такую величину α , которая бы оптимально удовлетворяла обоим условиям в (12.5). Это можно сделать, организовав специальным образом перебор значений α . Практически для выбора оптимального параметра регуляризации организуется последовательность значений α в виде убывающей геометрической прогрессии:

$$\alpha_{k+1} = \mu\alpha_k. \quad (12.14)$$

Начальное значение α определяется характером задачи, можно без потери общности считать, что $\alpha_0 = 1$. Величину $\mu < 1$ обычно полагают равной $0,1$. Если параметр α фиксирован, решение задачи (12.13) становится решением обычной задачи подбора. В итоге применение метода регуляризации сводится к многократному решению задачи подбора и выбору оптимального параметра регуляризации, исходя из некоторых критериев.

При интерпретации гравитационных и магнитных аномалий встречаются две ситуации, различающиеся тем, известна ли норма помехи δ в исходных данных или нет. Если она известна, то выбор регуляризованного решения p_δ осуществляется по так называемому критерию невязки:

$$\|Dp - u_\delta\|_{R^m} = \delta. \quad (12.15)$$

Это значит, что перебирая различные значения α , надо следить за получаемой невязкой и выбирать в качестве оптимальной ту модель, поле которой воспроизводит интересующую часть аномалии и игнорирует помеху. Однако, чаще δ бывает неизвестна. Дело в том, что большая часть помехи - это помеха геологического происхождения, связанная с неоднородностью верхней части разреза и с влиянием объектов, не учитываемых в модели, а эти источники помех лишь в редких случаях доступны анализу и оценке.

Если норма помехи неизвестна, то для выбора параметра регуляризации применяют квазиоптимальный критерий, предложенный А.Н.Тихоновым и В.Б.Гласко. В соответствии с ним, выбираться должно такое значение $\alpha > 0$, которое минимизирует следующую норму:

$$\left\| \alpha \frac{dp_\alpha}{d\alpha} \right\|_{R^n} = \min. \quad (12.16)$$

Если таких значений несколько, в качестве квазиоптимального берут наименьшее из них. Практически при использовании данного критерия следят за изменением параметров при изменении α по закону (12.14) и в качестве регуляризованного выбирают то решение, при котором такое изменение минимально. Этот критерий обоснован теоретически лишь для некоторых классов задач, но получил весьма широкое распространение на практике. Иногда квазиоптимальный критерий по имени авторов называют критерием Тихонова-Гласко.

Другой способ выбора параметра регуляризации при отсутствии информации о норме помехи, предложенный П.Н.Заикиным и А.С.Меченовым, называется способом отношения норм. В соответствии с ним выбираться должно наименьшее из значений $\alpha > 0$, при которых достигается локальный минимум следующего отношения:

$$\frac{\left\| \alpha \frac{dp_\alpha}{d\alpha} \right\|_{R^n}^2}{\left\| Dp_\alpha - u \right\|_{R^m}^2} = \min. \quad (12.17)$$

При решении обратных задач геофизики этот критерий применяется гораздо реже критерия Тихонова-Гласко, но хорошо зарекомендовал себя в задачах обработки физических экспериментов.

Перейдем к рассмотрению особенностей применения различных стабилизаторов. Как отмечено выше, выбор стабилизатора определяется характером решаемой задачи и преследует цель подавления различных проявлений неустойчивости. Большинство применяемых стабилизаторов относится к следующим трем группам:

- 1) стабилизаторы, характеризующие дифференциальные свойства искомого решения;
- 2) стабилизаторы, характеризующие степень близости искомого решения к заданному начальному приближению;
- 3) стабилизаторы, характеризующие структурные свойства искомого решения.

Стабилизаторы первого типа применяют тогда, когда известно, что искомое решение, выраженное в виде некоторой непрерывной функции, должно обладать высокой степенью гладкости. Так, если решение представляет собой функцию $f(\mathbf{s})$,

заданную на отрезке $[a, b]$, за меру гладкости можно принять значения следующего функционала:

$$\Omega[f] = \int_a^b \left\{ \sum_{k=0}^K q_k(s) \left(\frac{d^k f}{ds^k} \right)^2 \right\} ds, \quad (12.18)$$

где $q_k(s) > 0$ - непрерывные весовые функции. Естественно, на практике искомую функцию все равно приходится заменять на ее конечномерную аппроксимацию, а от функционала качества переходить к функции. Число K , определяющее количество используемых производных, называют порядком стабилизатора.

Рассмотрим в качестве примера простейший стабилизатор нулевого порядка для модели, описываемой n параметрами. Если пренебречь весовыми коэффициентами, то этот стабилизатор фактически становится квадратом нормы решения в пространстве R^n :

$$\Omega[p] = \|p\|_{R^n}^2. \quad (12.19)$$

Применение такого стабилизатора означает, что ищется решение обратной задачи, отличающееся минимальной нормой. Мы уже встречались с подобным требованием при рассмотрении линеаризованных задач подбора. Действительно, такое же условие накладывается на решение, получаемое методами псевдообращения и Бэкуса-Гильберта, только там регуляризация проводится в неявном виде с помощью сингулярного разложения. В этом смысле методы псевдообращения и Бэкуса-Гильберта также являются частными случаями метода регуляризации, отличающимися применением стабилизатора нулевого порядка. Если оператор решения прямой задачи линеен, и его можно представить в виде матрицы A , то применение метода регуляризации сведется к минимизации следующей функции:

$$\|Ap - u\|_{R^m}^2 + \alpha \|p\|_{R^n}^2 = \min. \quad (12.20)$$

Дифференцируя ее по всем переменным за исключением параметра регуляризации α и приравнявая производные нулю, мы приходим к следующей форме системы уравнений Эйлера:

$$(A^T A + \alpha I)p = A^T u, \quad (12.21)$$

где I - единичная матрица n -ого порядка. В процессе перебора значений α каждый раз надо решать линейные системы, отличающиеся лишь диагональными элементами матрицы. Поскольку большая часть вычислений связана с формированием матрицы $A^T A$ и столбца свободных членов $A^T u$, а это, как видно из (12.21), требуется сделать только один раз, применение метода регуляризации в данной задаче не приводит к существенному увеличению времени расчетов.

Для двумерных и трехмерных задач обычно ограничиваются применением стабилизаторов первого порядка. Так при решении обратных задач гравиразведки и магниторазведки для модели контактной поверхности, задаваемой уравнением $z=z(x,y)$, используют в качестве стабилизатора следующий функционал, накладывающий ограничения на негладкость границы:

$$\Omega[z] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left(\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y^2} \right)^2 \right\} dx dy. \quad (12.22)$$

Если же решается двумерная обратная задача для звездного относительно центра масс замкнутого тела, граница которого в полярных координатах (r,φ) с центром в этой же точке имеет уравнение $r=r(\varphi)$, стабилизатор можно выбрать в форме

$$\Omega[p] = \int_0^{2\pi} |r'(\varphi)|^2 d\varphi. \quad (12.23)$$

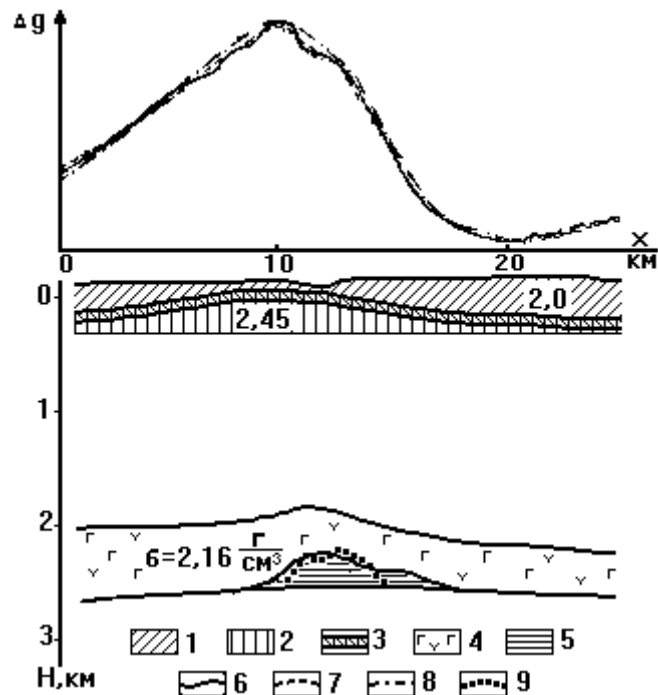


Рис. 20. Результаты интерпретации аномалии силы тяжести на газовом месторождении Уртабулак методом регуляризации (по Е.А.Мудрецовоу и В.Г.Филатову):

- 1 - отложения верхнего палеогена и неогена; 2 - отложения верхнего мела; 3 - отложения бухарских известняков; 4 - отложения соляно-ангидритовой формации; 5 - рифогенные известняки келловей-оксфорда; 6 - график Δg ; 7 - график Δg , пересчитанной на горизонтальный уровень $H = 306$ м; 8 - график Δg от известной части разреза; 9 - граница рифогенных известняков келловей-оксфорда, определенная методом регуляризации

При практическом применении эти функционалы, как было отмечено выше, становятся функциями, зависящими от конечного числа параметров, с помощью которых аппроксимируются искомые функции $\mathbf{z}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ или $\mathbf{r}(\varphi)$. Другими словами, применение метода регуляризации при этом также сводится к многократному упорядоченному решению задачи подбора в пространстве \mathbb{R}^n без ограничений и выбору оптимального параметра регуляризации.

На рис. 20 приведен пример применения метода регуляризации для интерпретации гравитационной аномалии на газовом месторождении Уртабулак, расположенном в Бухарской области Узбекистана. Исходная аномалия силы тяжести, заданная на неровном рельефе, была пересчитана на горизонтальный уровень, проходящий через верхнюю точку рельефа с абсолютной отметкой 306 м. Затем было выполнено геологическое редуцирование, заключающееся в вычитании поля известной верхней части разреза. По остаточной аномалии с помощью метода регуляризации определена форма контактной поверхности, с точностью около 3 % совпадающей с кровлей рифогенных известняков, являющихся коллектором газа.

Вторая группа стабилизаторов задает требование минимального отличия искомой модели от стартовой, то есть обратная задача сводится к небольшой корректровке стартовой модели, например, относительно опорного разреза. В этом случае стабилизаторы могут иметь такой вид:

$$\Omega[p] = \|p - p_0\|_{\mathbb{R}^n}^2. \quad (12.24)$$

Если оператор решения прямой задачи линеен и представим в виде матрицы \mathbf{A} , метод регуляризации приводит к задаче

$$\|A p - u\|_{\mathbb{R}^m}^2 + \alpha \|p - p_0\|_{\mathbb{R}^n}^2 = \min. \quad (12.25)$$

Легко убедиться, что для фиксированного α система нормальных уравнений или уравнений Эйлера примет при этом следующий вид:

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha \mathbf{I}) p = \mathbf{A}^T u + \alpha p_0. \quad (12.26)$$

Как видно из данной формулы, введение стабилизаторов этого типа для линейных и линеаризованных задач также незначительно усложняет вычислительные процедуры.

Наконец, третья группа стабилизаторов определяет структурные свойства искомого решения. Эти стабилизаторы часто применяются для адаптивной регуляризации - такой, которая настраивается на конкретные свойства решения. В качестве примера рассмотрим методику регуляризации решения в методе сеток, предложенную А.А.Непомнящих и В.С.Ли. Как было отмечено в § 9, применение метода подбора для сеточных моделей приводит к гармоническому решению, которое с точки зрения геолога - бессмысленно. Для подавления этого эффекта была применена

адаптивная регуляризация со стабилизаторами нулевого порядка. Пусть требуется решить двумерную обратную задачу гравirazведки для сетки, состоящей из n клеток в отсутствие регионального фона, то есть найти $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$. Тогда стабилизатор можно выбрать в такой форме:

$$\Omega[\sigma] = \sum_{i=1}^n q_i \sigma_i^2, \quad (12.27)$$

где q_i - весовые коэффициенты. Решение задачи производится за несколько этапов.

На первом этапе ищутся гармонические моменты источника и определяются координаты центра масс, а также при заданном значении избыточной плотности вычисляется площадь поперечного сечения объекта. Поскольку об определении формы источника на первом этапе речь не идет, нас может пока удовлетворить и гармоническое решение. Фактически на первом этапе сетка используется как модель в аппроксимационном способе определения моментов. Для исключения получения модели с большим разбросом значений σ_i целесообразно ввести условие минимальности нормы решения, поэтому на первом этапе все $q_i = 1$. По полученным данным вычисляются координаты центра масс и радиус круга R с площадью, равной площади изучаемого объекта.

На втором этапе путем выбора весовых коэффициентов q_i в стабилизаторе (12.27) подавляется стремление решения к гармоническому. Гармоническое решение характерно тем, что минимальные и максимальные значения избыточной плотности клеток располагаются по границе сетки (рис. 17б). Чтобы не допустить этого, весовые коэффициенты в стабилизаторе должны быть тем больше, чем больше расстояние i -ой клетки от центра масс. Однако, если ограничиться только этим условием, объект может стянуться в точку. Таким образом, на втором этапе весовые коэффициенты выбираются в зависимости от расстояния d_i между центром i -ой клетки и центром масс по следующим правилам:

$$\begin{aligned} \text{если } d_i \leq R, \text{ то } q_i &= 1, \\ \text{если } d_i > R, \text{ то } q_i &= d_i / R. \end{aligned} \quad (12.28)$$

Штраф, накладываемый стабилизатором на решение, оказывается тем большим, чем больше избыточная плотность i -ой клетки и чем дальше она от защитного круга, радиус R которого определен на первом этапе. В результате на втором этапе решение уже не будет гармоническим, но останется резко неоднородным, причем на границах сетки могут сохраниться клетки с малыми избыточными плотностями.

С целью выравнивания плотностей внутри тела и стремления избыточной плотности к нулю вне его, на третьем этапе производится перераспределение плотностей. Для этого проводят несколько итераций, причем в качестве начального приближения принимают результаты второго этапа, а оптимальный параметр регуляри-

зации выбирают лишь один раз во время первой итерации. Весовые коэффициенты выбираются по следующим правилам:

$$\begin{aligned}
 &\text{если } \sigma_i < 0,1\sigma_{\max}, \text{ то } q_i = 500, \\
 &\text{если } 0,1\sigma_{\max} \leq \sigma_i < 0,2\sigma_{\max}, \text{ то } q_i = 8, \\
 &\text{если } 0,2\sigma_{\max} \leq \sigma_i < 0,3\sigma_{\max}, \text{ то } q_i = 5, \\
 &\text{если } 0,3\sigma_{\max} \leq \sigma_i < 0,5\sigma_{\max}, \text{ то } q_i = 2, \\
 &\text{если } 0,5\sigma_{\max} \leq \sigma_i, \text{ то } q_i = 1.
 \end{aligned}
 \tag{12.29}$$

Процесс перераспределения прерывается, когда структура получаемого решения удовлетворит интерпретатора, обычно для этого требуется 2-3 итерации.

Таким образом, выбор весовых коэффициентов в достаточно простом по виду стабилизаторе (12.27) дает возможность управлять структурой получаемого решения. Обратим внимание на то, что на всех этапах при этом приходится решать следующую систему нормальных уравнений:

$$(A^T A + \alpha Q)p = A^T u,
 \tag{12.30}$$

где Q - диагональная матрица коэффициентов q_i , поэтому на пересчет матрицы системы требуется в каждом случае минимальное время.

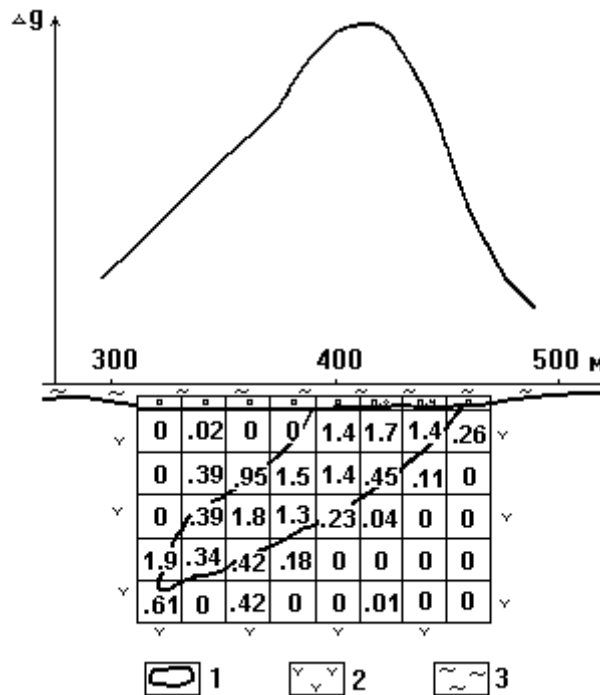


Рис. 21. Результаты интерпретации гравитационной аномалии на месторождении хромитов регуляризованным методом сеток (избыточная плотность выделенных блоков указана в г/см³) (по А.А.Непомнящих и В.С.Ли):

1 - граница рудного тела по данным бурения; 2 - дуниты; 3 - рыхлые отложения

На рис. 21 показан пример применения адаптивно регуляризованного метода сеток для определения формы одного из хромитовых рудных тел, расположенных в пределах Кемпирсайского ультраосновного массива. На нем видно, что полученное решение не является гармоническим и достаточно хорошо совпадает с реальным рудным телом.

Подводя итоги рассмотрения основ метода регуляризации, отметим следующие его особенности.

1. Метод регуляризации является наиболее общим методом устойчивого решения обратных задач. Метод подбора, в том числе такие его модификации как псевдообращение и метод Бэкуса-Гильберта являются частными формами метода регуляризации.

2. Основным преимуществом метода регуляризации перед методами подбора является возможность получения устойчивого решения на множествах моделей, которые не являются компактными в пространстве R^n .

3. Выбор стабилизатора в методе регуляризации дает возможность управлять структурой решения, учитывать не только количественную, но и качественную априорную информацию.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Нами рассмотрены основные способы решения некорректно поставленных задач детального количественного описания гравитационных и магнитных аномалий, базирующиеся на методах подбора и регуляризации. При проведении количественного истолкования реальных аномальных полей методически наиболее правильно применять комплекс, включающий способы, относящиеся к разным группам, то есть обязательно использовать помимо подбора методы моментов и особых точек. Лишь синтезируя результаты, полученные разнородными независимыми методами, и максимально полно учитывая априорные геолого-геофизические данные, интерпретатор может получать новую, объективную и достоверную геологическую информацию

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексидзе М.А. Приближенные методы решения прямых и обратных задач гравиметрии. М: Наука. 1987. 336 с.
2. Березкин В.М. Метод полного градиента при геофизической разведке. М: Недра. 1988. 188 с.
3. Блох Ю.И. Количественная интерпретация гравитационных аномалий. М.: Издательство МГРИ. 1982. 92 с.
4. Булах Е.Г. Интегральные соотношения для интерпретации гравитационных аномалий. Киев: Наукова думка. 1965.
5. Булах Е.Г., Ржаницын В.А., Маркова М.Н. Применение метода минимизации для решения задач структурной геологии по данным гравиразведки. Киев: Наукова думка. 1976. 219 с.
6. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. М.: Мир. 1985. 509 с.
7. Гольдшмидт В.И. Оптимизация процесса количественной интерпретации данных гравиразведки. М.: Недра. 1984. 185 с.
8. Гольцман Ф.М. Статистические модели интерпретации. М.: Наука. 1971. 327 с.
9. Гольцман Ф.М., Калинина Т.Б. Статистическая интерпретация магнитных и гравитационных аномалий. Л.: Недра. 1983. 248 с.
10. Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. М.: Наука. 1978. 205 с.
11. Кобрунов А.И. Теория интерпретации данных гравиметрии для сложно-построенных сред. Киев: УМК ВО. 1989. 100 с.
12. Кобрунов А.И. Теоретические основы решения обратных задач геофизики. Ухта: Издательство УИИ. 1995. 226 с.
13. Мудрецова Е.А., Варламов А.С., Филатов В.Г., Комарова Г.М. Интерпретация данных высокоточной гравиразведки на неструктурных месторождениях нефти и газа. М: Недра. 1979.
14. Непомнящих А.А., Овчаренко А.В., Ли В.С., Соколов Л.В. Интерпретация гравитационных аномалий на основе пространственного изучения и разделения полей. Алма-Ата: КазПТИ. 1978. 86 с.
15. Старостенко В.И. Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии. Киев: Наукова думка. 1978. 228 с.
16. Страхов В.Н. Основные идеи и методы извлечения информации из данных гравитационных и магнитных наблюдений // Теория и методика интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. М.: ИФЗ АН СССР. 1979. с. 146-269.

17. Страхов В.Н. Методы интерпретации гравитационных и магнитных аномалий. Пермь: Издательство ПГУ. 1984. 72 с.

18. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука. 1986. 288 с.

19. Трошков Г.А., Грознова А.А. Математические методы интерпретации магнитных аномалий. М: Недра. 1985. 151 с.

20. Цирульский А.В. Функции комплексного переменного в теории и методах потенциальных геофизических полей. Свердловск: УрО АН СССР. 1990. 132 с.

21. Яновская Т.Б., Порохова Л.Н. Обратные задачи геофизики. Л.: ЛГУ. 1983. 212 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	стр.
Введение	3
Глава 1. Методы моментов	4
§ 1. Гармонические моменты и интегральные характеристики геологических объектов	4
§ 2. Способы определения гармонических моментов	12
Глава 2. Методы особых точек	19
§ 3. Особые точки аналитических функций	19
§ 4. Связь особых точек функций, описывающих гравитационные и магнитные аномалии, с формой их источников	22
§ 5. Локализация особых точек с помощью аппроксимационного продолжения	30
§ 6. Локализация особых точек способом нормированных функций	37
§ 7. Локализация особых точек способом отношения производных	40
Глава 3. Методы подбора и регуляризации	44
§ 8. Основы метода подбора	44
§ 9. Решение линейных задач подбора	48
§ 10. Решение линеаризованных задач подбора	55
§ 11. Решение нелинейных задач подбора	60
§ 12. Основы метода регуляризации	74
Заключение	85
Литература	86

Юрий Исаевич Блох
КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ
ГРАВИТАЦИОННЫХ И МАГНИТНЫХ АНОМАЛИЙ
Учебное пособие

Редактор Л.А.Захарчук

Лицензия № 020849 от 04.01.94 г.

Подписано в печать Формат бумаги 60x90 1/16.

Бумага типографская № 3. Печать офсетная. Печ. л. 5,0.

Тираж 100 экз.

Редакционно-издательский отдел МГГА